33

Aufgabe 3 Nichtlineare Schaltung zweiten Grades (33 Punkte)

Bild 3 zeigt eine dynamische Schaltung zweiten Grades mit positiven Werten G, C und L und nichtlinearem Widerstand $\mathcal{R}$, für den gilt: $u_{\mathcal{R}} = r(i_{\mathcal{R}})$ mit der nichtlinearen Funktion $r(i_{\mathcal{R}})$.

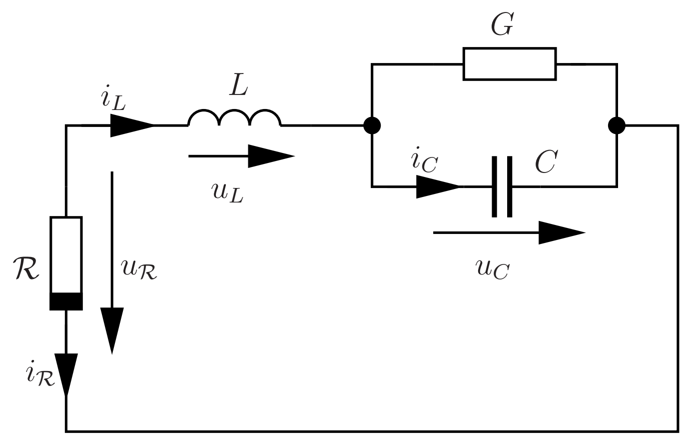


Bild 3. Schaltung zweiten Grades

2

a)* Nennen Sie die beiden Zustandsgrößen.

$u_C \checkmark, i_L \checkmark$

3

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Kirchoff'schen **Strom**gesetzes die erste Differentialgleichung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Es dürfen dabei nur die beiden Zustandsgrößen, die Ableitung einer Zustandsgröße, sowie die Bauelementewerte L, G und C vorkommen!

$$i_L = i_C + Gu_C \checkmark \Rightarrow i_C = i_L - Gu_C = C\,\dot{u}_C \checkmark$$

$$\Rightarrow \dot{u}_C = -\frac{G}{C}u_C + \frac{1}{C}i_L \checkmark$$

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Kirchoff'schen **Spannungs**gesetzes die zweite Differentialgleichung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Es dürfen dabei nur die beiden Zustandsgrößen, die Ableitung einer Zustandsgröße, sowie die Bauelementewerte L, G, C und die nichtlineare Funktion $r(\cdot)$ vorkommen! 4

$$u_L = u_{\mathcal{R}} - u_C \surd = L\,\dot{i}_L \;\surd$$

$$\Rightarrow \dot{i}_L = -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}r(i_{\mathcal{R}}) \surd = -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}r(-i_L) \surd$$

Der nichtlineare Widerstand habe die Kennlinie

$$u_{\mathcal{R}} = r(i_{\mathcal{R}}) = -d\, i_{\mathcal{R}}\, \Omega + \left(\frac{i_{\mathcal{R}}}{\mathrm{A}}\right)^3 \mathrm{V}$$

mit $d > 0$.

d)* Ist der Widerstand spannungsgesteuert? 1

Nein $\surd$

e)* Ist der Widerstand stromgesteuert? 1

Ja $\surd$

Durch eine bestimmte Wahl der Bauelementewerte und durch Normierung erhält man das nichtlineare System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = -3x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 4x_2 - 2x_2^3 \end{aligned} \tag{5}$$

$\boxed{6}$ f)* Bestimmen Sie die Fixpunkte $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ und $\boldsymbol{p}_3$ des Differentialgleichungssystems in (5).

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \surd$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -2x_2 + 4x_2 - 2x_2^3 = 0 \surd \Rightarrow x_2 = x_2^3 \surd \Rightarrow x_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad \surd\surd$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{p}_2 = \left. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \left. \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right] \surd$$

$\boxed{4}$ g)* Berechnen Sie die Jacobimatrix $\boldsymbol{J}$ von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left. \begin{array}{c} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{array} \right]$ für allgemeine Zustände x_1 und x_2.

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \surd = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 - 6x_2^2 \end{bmatrix} \surd\surd\surd$$

h) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix des um den Punkt herum linearisierten Systems, zu dem es keinen punktsymmetrischen weiteren Fixpunkt gibt. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben. 5

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{0})\surd = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \surd$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \surd \Rightarrow \lambda_1 = 3\surd, \lambda_2 = -2\surd$$

i) Um welches Phasenportrait handelt es sich in der lokalen Umgebung dieses Fixpunktes? 1

Es handelt sich um einen Sattelpunkt $\surd$

j) Sind die beiden anderen Fixpunkte stabil? Begründen Sie Ihre Antwort! 5

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{p}_3) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4-6\surd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 12 = 0 \surd \Rightarrow \lambda_1 = -2.5 + \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{23}}{2} \surd \Rightarrow \lambda_1 = -2.5 - \mathrm{j}\,\frac{\sqrt{23}}{2} \surd$$

Negativer Realteil $\Rightarrow$ stabil$\surd$

1

k) Welche Funktion erfüllt die Schaltung somit?

Es handelt sich um eine bistabile Schaltung (Flip-Flop) √

35

Aufgabe 1 Oszillatorschaltung (35 Punkte)

Gegeben sei folgende Schaltung:

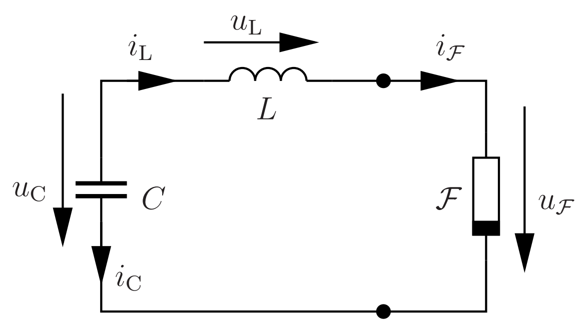


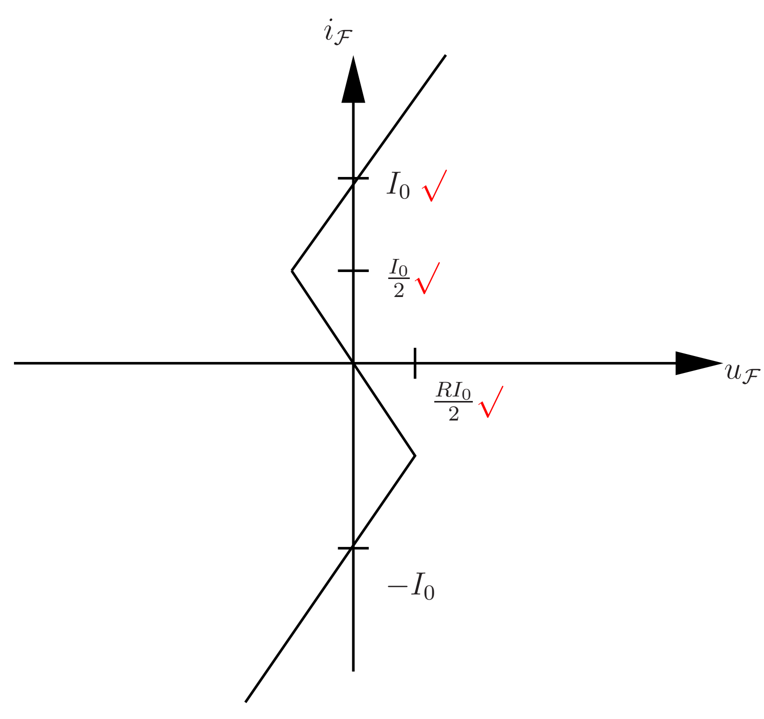
Bild 1. Oszillatorschaltung

Die Spannung $u_{\mathcal{F}}$ am Eintor $\mathcal{F}$ hängt vom Strom $i_{\mathcal{F}}$ auf folgende Weise ab:

$$u_{\mathcal{F}}(i_{\mathcal{F}}) = \begin{cases} Ri_{\mathcal{F}} + RI_0 & \text{für } i_{\mathcal{F}} < -\frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich I} \\ -Ri_{\mathcal{F}} & \text{für } |i_{\mathcal{F}}| \leq \frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich II} \\ Ri_{\mathcal{F}} - RI_0 & \text{für } i_{\mathcal{F}} > \frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich III} \end{cases}$$

3

a)* Zeichnen Sie die Kennlinie des Eintors $\mathcal{F}$ in der $u_{\mathcal{F}} - i_{\mathcal{F}}$ Ebene und kennzeichnen Sie die relevanten Punkte. Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.



b)* Welche der folgenden Aussagen über das Eintor $\mathcal{F}$ sind wahr, welche falsch? 3

1) $\mathcal{F}$ ist quellenfrei
2) $\mathcal{F}$ ist ungepolt
3) $\mathcal{F}$ ist linear

$\mathcal{F}$ ist quellenfrei $\surd$, ungepolt $\surd$und nicht linear $\surd$

c)* Welche grundlegende Eigenschaft muss ein System haben, damit sich eine Oszillation mit stabilem Grenzzyklus ergeben kann? Ist diese Eigenschaft in der Schaltung in Bild 1 erfüllt? 2

Es muss eine Nichtlinearität vorhanden sein $\surd$.
Diese Bedingung ist erfüllt, da $\mathcal{F}$ nichtlinear ist $\surd$.

d)* Stellen Sie für den Zustandsvektor $\boldsymbol{x} = [u_\mathrm{C}, i_\mathrm{L}]^\mathrm{T}$ das Differentialgleichungssystem im Bereich II auf und bringen Sie es auf die Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Welche Einträge hat $\boldsymbol{A}$? 5

Bereich II: $u_\mathcal{F} = -Ri_\mathcal{F}$

$i_\mathrm{C} = -i_\mathrm{L} = C\,\dot{u}_\mathrm{C}$ $\surd$ $\Rightarrow \dot{u}_\mathrm{C} = -\frac{1}{C} i_\mathrm{L}$ $\surd$

$u_\mathrm{L} = u_\mathrm{C} - u_\mathcal{F} \surd = u_\mathrm{C} + Ri_\mathcal{F} = u_\mathrm{C} + Ri_\mathrm{L} = L\,\dot{i}_\mathrm{L}$
$\Rightarrow \dot{i}_\mathrm{L} = \frac{1}{L} u_\mathrm{C} + \frac{R}{L} i_\mathrm{L}$ $\surd$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \surd$$

4

e)* Für eine bestimmte Dimensionierung von R, L und C ergebe sich die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{101}}{\mathrm{mF}} \\ \frac{\sqrt{101}}{\mathrm{mH}} & \frac{2}{\mathrm{ms}} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Betrag $|\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}|$ des Imaginärteils $\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}$ der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von $\boldsymbol{A}$.

$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \checkmark = \lambda^2 - \frac{2}{\mathrm{ms}}\lambda + \frac{101}{(\mathrm{ms})^2} \checkmark = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1(\mathrm{ms})^{-1} \pm \sqrt{1 - 101}(\mathrm{ms})^{-1} = 1(\mathrm{ms})^{-1} \pm \mathrm{j}10(\mathrm{ms})^{-1} \checkmark$

$\Rightarrow |\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}| = 10(\mathrm{ms})^{-1} \checkmark$

2

f) Verhält sich der Oszillator eher harmonisch oder eher relaxierend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Eher harmonisch $\checkmark$, da $|\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}| > 0$ $\checkmark$

1

g)* Welche Leistung $p_{\mathcal{F}}(t)$ wird am Eintor $\mathcal{F}$ in Abhängigkeit der Spannung $u_{\mathcal{F}}(t)$ und des Stromes $i_{\mathcal{F}}(t)$ umgesetzt?

$p_{\mathcal{F}}(t) = u_{\mathcal{F}}(t) i_{\mathcal{F}}(t) \checkmark$

h)* Im Folgenden sei $i_{\mathcal{F}}(t) = \hat{I}\sin(\omega t)$. Lösen Sie diese Gleichung nach t auf für $-\frac{\pi}{2} < \omega t \leq \frac{\pi}{2}$. 1

$t = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{\hat{I}}\right)$ √

i) Zur Bestimmung der Oszillationsamplitude $\hat{I} > I_0$ benötigt man unter anderem das Integral $X = \int p_{\mathcal{F}}(t)\mathrm{d}t$ im Bereich $0 \leq i_{\mathcal{F}} \leq \frac{I_0}{2}$. Berechnen Sie dieses Integral unter Verwendung der beiden vorausgegangenen Aufgaben g) und h). 7

Hinweis: Für $0 \leq i_{\mathcal{F}}(t) \leq \frac{I_0}{2}$ ist Bereich II gültig. Außerdem ist $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Bereich II: $u_{\mathcal{F}}(t) = -Ri_{\mathcal{F}}(t)$ √

Integralgrenzen: $t(i_{\mathcal{F}} = 0) = 0$ √
$t(i_{\mathcal{F}} = \frac{I_0}{2}) = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)$ √

$$\int_0^{\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)} p_{\mathcal{F}}(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)} Ri_{\mathcal{F}}^2(t)\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^{\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)} R\hat{I}^2\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t \checkmark = -\frac{R\hat{I}^2}{2}\int_0^{\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)} [1-\cos(2\omega t)]\,\mathrm{d}t \checkmark$$
$$= -\frac{R\hat{I}^2}{2}\left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)} \checkmark$$
$$= -\frac{R\hat{I}^2}{2}\left[\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right) - \frac{\sin\left[2\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)\right]}{2\omega}\right]$$
$$= -\frac{R\hat{I}^2}{4\omega}\left[2\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right) - \sin\left[2\arcsin\left(\frac{I_0}{2\hat{I}}\right)\right]\right] \checkmark$$

1 j)* Ein weiteres Integral Y ist definiert als

$$Y = \int p_{\mathcal{F}}(t)\mathrm{d}t \text{ im Bereich } \frac{I_0}{2} \leq i_{\mathcal{F}} \leq \hat{I}. \tag{1}$$

Welcher Zusammenhang besteht aus Energiegründen zwischen X und Y?

$X + Y = 0$ √.

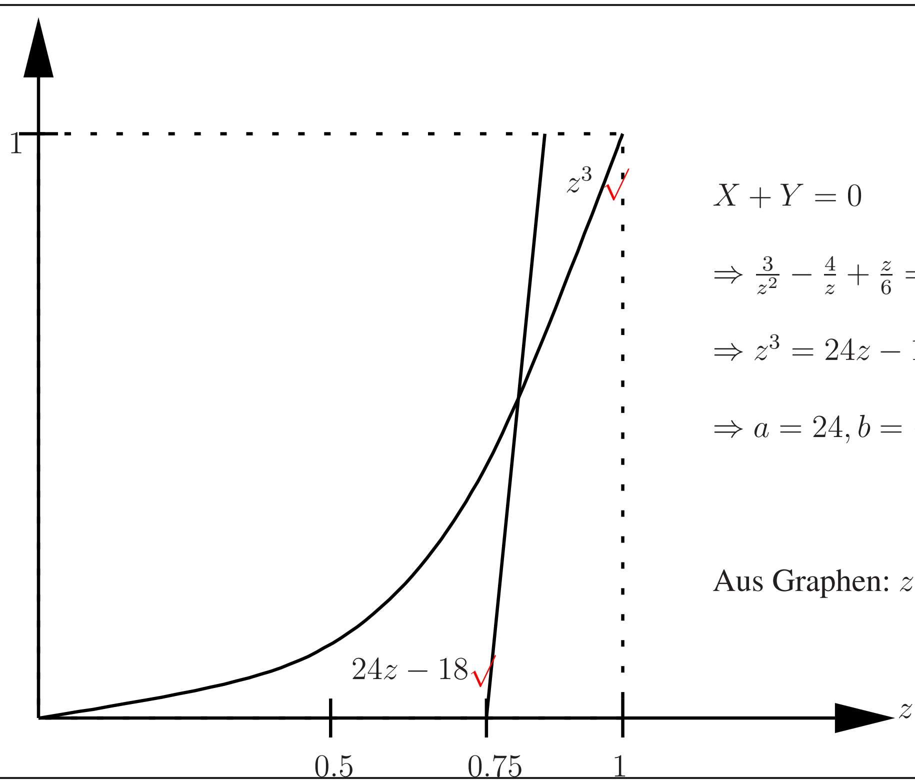
6 k) Durch Taylorreihenentwicklung (und π-Näherung) ergibt sich das Integral X zu

$$X \approx \frac{I_0^2 R}{4\omega}\left(-\frac{z}{6}\right) \tag{2}$$

und das Integral Y zu

$$Y \approx \frac{I_0^2 R}{4\omega}\left(\frac{3}{z^2} - \frac{4}{z} + \frac{z}{3}\right) \tag{3}$$

mit der Substitution $z = \frac{I_0}{\hat{I}}$. Bringen sie die Gleichungen (2) und (3) mittels des in Teilaufgabe j) erzielten Zusammenhangs auf die Form $z^3 = az + b$.
Zeichnen Sie die beiden Graphen z^3 und $az + b$ in das Koordinatensystem und ermitteln Sie anhand des Schnittpunktes den Wert von z.



$X + Y = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{z^2} - \frac{4}{z} + \frac{z}{6} = 0$ √

$\Rightarrow z^3 = 24z - 18$ √

$\Rightarrow a = 24, b = -18$ √

Aus Graphen: $z \approx 0.77$ √