Aufgabe 3 Nichtlineare Schaltung zweiten Grades (33 Punkte)

Bild 3 zeigt eine dynamische Schaltung zweiten Grades mit positiven Werten G, C und L und nichtlinearem Widerstand $\mathcal{R}$, für den gilt: $u_{\mathcal{R}} = r(i_{\mathcal{R}})$ mit der nichtlinearen Funktion $r(i_{\mathcal{R}})$.

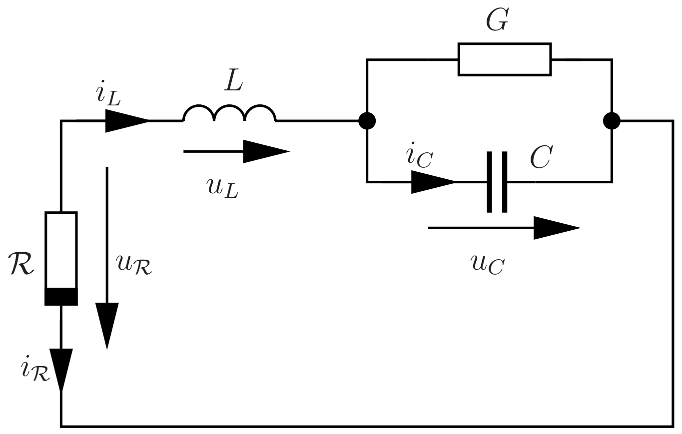

Bild 3. Schaltung zweiten Grades

a)* Nennen Sie die beiden Zustandsgrößen.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Kirchoff'schen **Strom**gesetzes die erste Differentialgleichung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Es dürfen dabei nur die beiden Zustandsgrößen, die Ableitung einer Zustandsgröße, sowie die Bauelementewerte L, G und C vorkommen!

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Kirchoff'schen **Spannungs**gesetzes die zweite Differentialgleichung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Es dürfen dabei nur die beiden Zustandsgrößen, die Ableitung einer Zustandsgröße, sowie die Bauelementewerte L, G, C und die nichtlineare Funktion $r(\cdot)$ vorkommen!

Der nichtlineare Widerstand habe die Kennlinie

$$u_{\mathcal{R}} = r(i_{\mathcal{R}}) = -d\, i_{\mathcal{R}}\, \Omega + \left(\frac{i_{\mathcal{R}}}{\mathrm{A}}\right)^3 \mathrm{V}$$

mit $d > 0$.

d)* Ist der Widerstand spannungsgesteuert?

e)* Ist der Widerstand stromgesteuert?

Durch eine bestimmte Wahl der Bauelementewerte und durch Normierung erhält man das nichtlineare System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = -3x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + 4x_2 - 2x_2^3 \end{aligned} \tag{5}$$

f)* Bestimmen Sie die Fixpunkte $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ und $\boldsymbol{p}_3$ des Differentialgleichungssystems in (5).

g)* Berechnen Sie die Jacobimatrix $\boldsymbol{J}$ von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$ für allgemeine Zustände x_1 und x_2.

h) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix des um den Punkt herum linearisierten Systems, zu dem es keinen punktsymmetrischen weiteren Fixpunkt gibt. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben.

i) Um welches Phasenportrait handelt es sich in der lokalen Umgebung dieses Fixpunktes?

j) Sind die beiden anderen Fixpunkte stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

k) Welche Funktion erfüllt die Schaltung somit?

Aufgabe 1 Oszillatorschaltung (35 Punkte)

Gegeben sei folgende Schaltung:

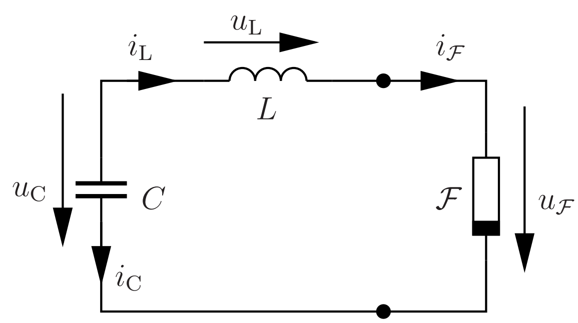

Bild 1. Oszillatorschaltung

Die Spannung $u_\mathcal{F}$ am Eintor $\mathcal{F}$ hängt vom Strom $i_\mathcal{F}$ auf folgende Weise ab:

$$u_\mathcal{F}(i_\mathcal{F}) = \begin{cases} Ri_\mathcal{F} + RI_0 & \text{für } i_\mathcal{F} < -\frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich I} \\ -Ri_\mathcal{F} & \text{für } |i_\mathcal{F}| \leq \frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich II} \\ Ri_\mathcal{F} - RI_0 & \text{für } i_\mathcal{F} > \frac{I_0}{2} \quad \text{Bereich III} \end{cases}$$

a)* Zeichnen Sie die Kennlinie des Eintors $\mathcal{F}$ in der $u_\mathcal{F} - i_\mathcal{F}$ Ebene und kennzeichnen Sie die relevanten Punkte. Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.

b)* Welche der folgenden Aussagen über das Eintor $\mathcal{F}$ sind wahr, welche falsch?

1) $\mathcal{F}$ ist quellenfrei
2) $\mathcal{F}$ ist ungepolt
3) $\mathcal{F}$ ist linear

c)* Welche grundlegende Eigenschaft muss ein System haben, damit sich eine Oszillation mit stabilem Grenzzyklus ergeben kann? Ist diese Eigenschaft in der Schaltung in Bild 1 erfüllt?

d)* Stellen Sie für den Zustandsvektor $\boldsymbol{x} = [u_\mathrm{C}, i_\mathrm{L}]^\mathrm{T}$ das Differentialgleichungssystem im Bereich II auf und bringen Sie es auf die Form $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Welche Einträge hat $\boldsymbol{A}$?

e)* Für eine bestimmte Dimensionierung von R, L und C ergebe sich die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{101}}{\mathrm{mF}} \\ \frac{\sqrt{101}}{\mathrm{mH}} & \frac{2}{\mathrm{ms}} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Betrag $|\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}|$ des Imaginärteils $\operatorname{Im}\{\lambda_{1,2}\}$ der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von $\boldsymbol{A}$.

f) Verhält sich der Oszillator eher harmonisch oder eher relaxierend? Begründen Sie Ihre Antwort.

g)* Welche Leistung $p_{\mathcal{F}}(t)$ wird am Eintor $\mathcal{F}$ in Abhängigkeit der Spannung $u_{\mathcal{F}}(t)$ und des Stromes $i_{\mathcal{F}}(t)$ umgesetzt?

h)* Im Folgenden sei $i_{\mathcal{F}}(t) = \hat{I}\sin(\omega t)$. Lösen Sie diese Gleichung nach t auf für $-\frac{\pi}{2} < \omega t \leq \frac{\pi}{2}$.

i) Zur Bestimmung der Oszillationsamplitude $\hat{I} > I_0$ benötigt man unter anderem das Integral $X = \int p_{\mathcal{F}}(t)\mathrm{d}t$ im Bereich $0 \leq i_{\mathcal{F}} \leq \frac{I_0}{2}$. Berechnen Sie dieses Integral unter Verwendung der beiden vorausgegangenen Aufgaben g) und h).

Hinweis: Für $0 \leq i_{\mathcal{F}}(t) \leq \frac{I_0}{2}$ ist Bereich II gültig. Außerdem ist $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

j)* Ein weiteres Integral Y ist definiert als

$$Y = \int p_{\mathcal{F}}(t)\mathrm{d}t \text{ im Bereich } \frac{I_0}{2} \leq i_{\mathcal{F}} \leq \hat{I}. \tag{1}$$

Welcher Zusammenhang besteht aus Energiegründen zwischen X und Y?

k) Durch Taylorreihenentwicklung (und π-Näherung) ergibt sich das Integral X zu

$$X \approx \frac{I_0^2 R}{4\omega}\left(-\frac{z}{6}\right) \tag{2}$$

und das Integral Y zu

$$Y \approx \frac{I_0^2 R}{4\omega}\left(\frac{3}{z^2} - \frac{4}{z} + \frac{z}{3}\right) \tag{3}$$

mit der Substitution $z = \frac{I_0}{\hat{I}}$. Bringen sie die Gleichungen (2) und (3) mittels des in Teilaufgabe j) erzielten Zusammenhangs auf die Form $z^3 = az + b$.
Zeichnen Sie die beiden Graphen z^3 und $az + b$ in das Koordinatensystem und ermitteln Sie anhand des Schnittpunktes den Wert von z.