30

Aufgabe 2 Lineare dynamische Schaltung 2. Grades (30 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die lineare dynamische Schaltung 2. Grades aus Bild 2 untersucht werden.

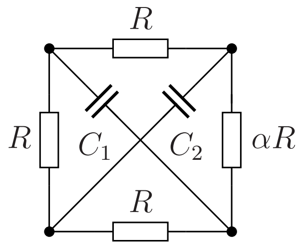


Bild 2: Lineare dynamische Schaltung 2. Grades

Durch geeignetes Umzeichnen läßt sich die Schaltung in folgende Ersatzschaltung überführen.

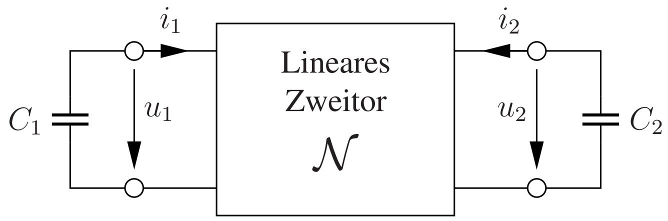
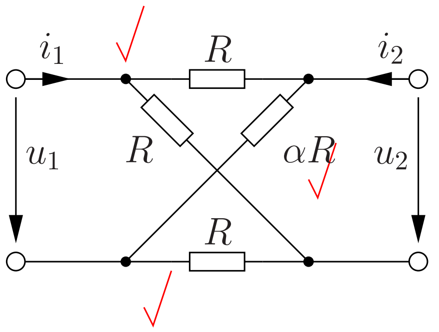


Bild 3: Ersatzschaltung

3

a)* Zeichnen Sie das fehlende lineare Zweitor $\mathcal{N}$ aus Bild 3.
Hinweis: Benennen Sie Knoten, um sich das Umzeichnen zu erleichtern!



1

b)* Welche **Torgrößen** bilden den Zustandsvektor?

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$ √

c)* Berechnen Sie exemplarisch das Element y_{11} der $\boldsymbol{Y}$-Matrix. Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung dieses Elements! 4

$$y_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} \surd = \left(G + \frac{1}{\alpha}G\right) \| 2G \surd = \frac{2\,(1+\alpha)}{3\alpha+1} G \surd \text{ mit } G = \frac{1}{R}$$

y_{11} ist der Eingangsleitwert von Tor 1 bei kurzgeschlossenem Tor 2.√

d) Ermitteln Sie aus den Zustandsgleichungen die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von den Elementen der $\boldsymbol{Y}$-Matrix, d. h. y_{11}, y_{12}, y_{21} und y_{22}, sowie den Kapazitäten C_1 und C_2. 3

$$\dot{u}_1 = -\frac{1}{C_1} i_1 = -\frac{1}{C_1}(y_{11}u_1 + y_{12}u_2) = -\frac{1}{C_1} y_{11} u_1 + -\frac{1}{C_1} y_{12} u_2 \surd$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{1}{C_2} i_2 = -\frac{1}{C_2}(y_{21}u_1 + y_{22}u_2) = -\frac{1}{C_2} y_{21} u_1 + -\frac{1}{C_2} y_{22} u_2 \surd$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -y_{11}/C_1 & -y_{12}/C_1 \\ -y_{21}/C_2 & -y_{22}/C_2 \end{bmatrix} \surd$$

Im folgenden ist die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ mit den Elementewerten $C_1 = 1\,\mathrm{F}$, $C_2 = 0{,}5\,\mathrm{F}$ und $R = 1\,\Omega$ in Abhängigkeit des Parameters $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\beta-1) & \beta \\ 2\beta & 2(\beta-1) \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}$$

e)* Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit des Parameters β. 3

Charakteristisches Polynom:

$$\left((\beta-1)\mathrm{s}^{-1} - \lambda\right)\left(2(\beta-1)\mathrm{s}^{-1} - \lambda\right) - 2\beta^2\mathrm{s}^{-2} =$$

$$\lambda^2 - 3(\beta-1)\mathrm{s}^{-1}\lambda + 2(1-2\beta)\mathrm{s}^{-2} = 0 \surd$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3(\beta-1)}{2}\mathrm{s}^{-1} \pm \mathrm{s}^{-1}\sqrt{\frac{9}{4}(\beta-1)^2 + 2(2\beta-1)} \surd$$

$$= \frac{3(\beta-1)}{2}\mathrm{s}^{-1} \pm \frac{1}{2}\mathrm{s}^{-1}\sqrt{9\beta^2 - 2\beta + 1} \surd$$

3

f) Existieren Werte von β, so daß konjugiert komplexe Eigenwerte entstehen? Begründen sie Ihre Antwort durch Rechnung!

Untersuchung der Diskriminante:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(9\beta^2 - 2\beta + 1\right) = 18\beta - 2 = 0 \text{ und } \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\beta^2}\left(9\beta^2 - 2\beta + 1\right) = 18 > 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{Minimum } \beta_{\text{min}} = \frac{1}{9} \checkmark$$

Nein, für alle $\beta \in \mathbb{R}$ gilt: $9\beta^2 - 2\beta + 1 > 0$.

$\Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \checkmark$

5

g) Untersuchen Sie die Stabilität der Schaltung und die Art der Gleichgewichtspunkte für die drei Fälle $\beta < 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$ und $\beta > 0{,}5$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{3(\beta-1)}{2}\mathrm{s}^{-1} \pm \mathrm{s}^{-1}\sqrt{\frac{9}{4}(\beta-1)^2 + 2(2\beta-1)}$$

1. Fall: $\beta < 0,5$

$$\sqrt{\frac{9}{4}(\beta-1)^2 + 2(2\beta-1)} < \left|\frac{3(\beta-1)}{2}\right| \text{ und } \frac{3(\beta-1)}{2} < 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} < 0$, stabiler $\checkmark$ Knoten $\checkmark$

2. Fall: $\beta = 0{,}5$

$\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{2}\mathrm{s}^{-1}$, stabiler degenerierter Knoten $\checkmark$

3. Fall:

$\beta > 0{,}5$

$$\sqrt{\frac{9}{4}(\beta-1)^2 + 2(2\beta-1)} > \left|\frac{3(\beta-1)}{2}\right|$$

$\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$, Sattel $\checkmark$, instabil $\checkmark$

Für einen bestimmten Wert von β ergibt sich die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}. \tag{2}$$

h)* Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$. 2

$$\lambda^2 = 2\mathrm{s}^{-2} \surd \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\mathrm{s}^{-1} \surd$$

i) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$. 2

Eigenvektor zu λ_1:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1} \boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \mathrm{V} \surd$$

Eigenvektor zu λ_2:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1} \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \mathrm{V} \surd$$

j) Zeichnen Sie schließlich aus den gewonnenen Ergebnissen das Phasenportrait der Schaltung für den speziellen Fall der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ aus Gleichung (2) in Bild 4 ein. 4

Hinweis: Vergessen Sie nicht die Achsenbeschriftung!

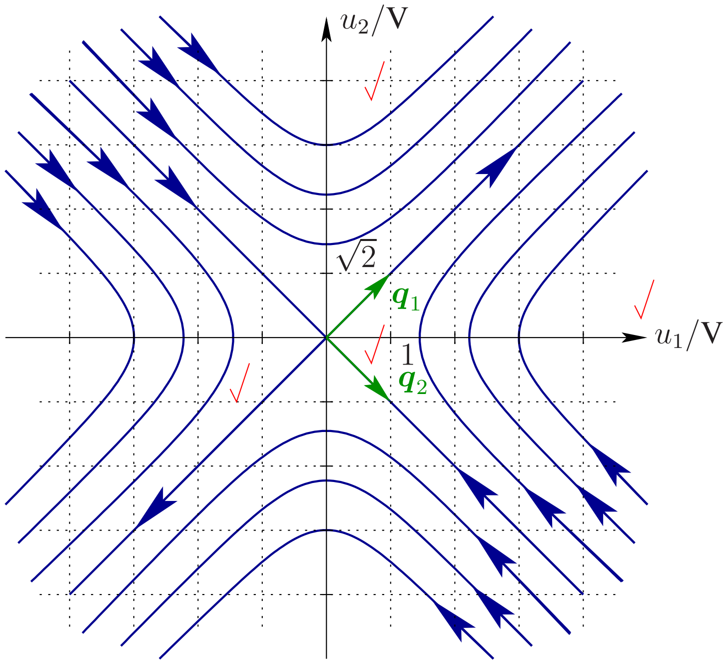
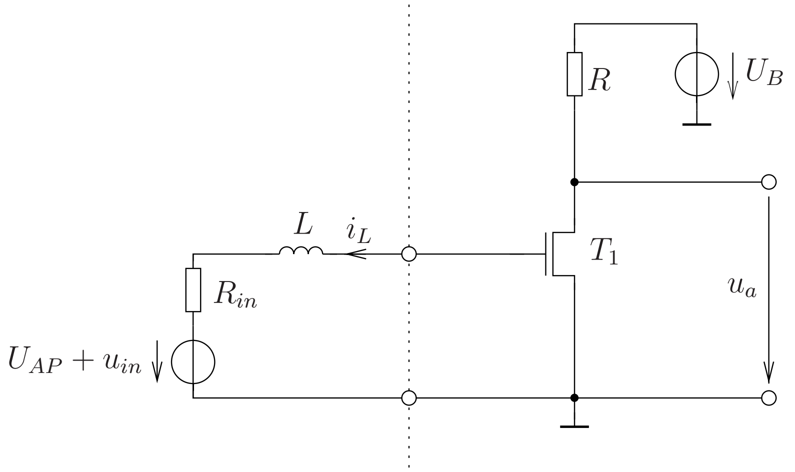


Bild 4: Phasenportrait

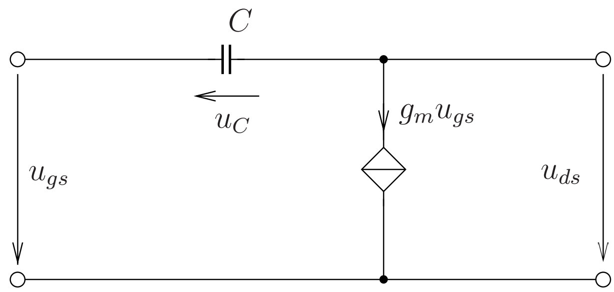
29

Aufgabe 2 Verstärker für einen induktiven Tonabnehmer (29 Punkte)

Im Verlauf dieser Aufgabe soll die Stabilität eines Gitarrenverstärkers betrachtet werden. Das Signal u_{in} wird dabei von einem induktiven Tonabnehmer erzeugt. Dieser kann mit der Serienschaltung einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand und einer Spule modelliert werden. Es handelt sich um einen einstufigen Verstärker. Die Gleichspannungen U_B und U_{AP} dienen der Arbeitspunkteinstellung.

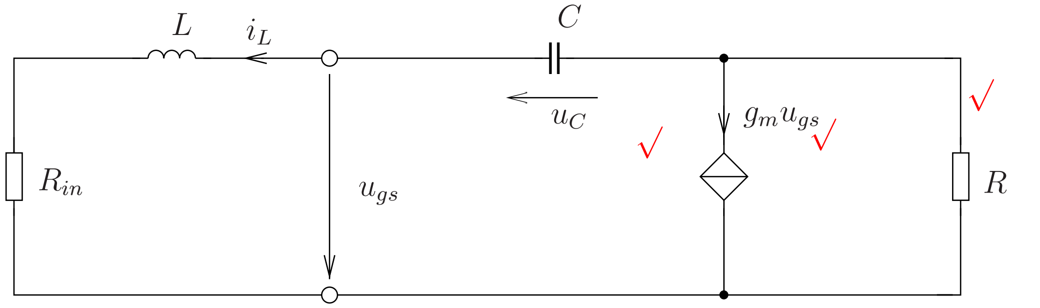


Bei dem verwendeten Transistor ist die parasitäre Gate-Drain Kapazität besonders groß. Diese soll deshalb bei der Modellierung berücksichtigt werden. Verwenden Sie für die weitere Aufgabe folgendes Kleinsignalersatzschaltbild für T_1.



Da in dieser Aufgabe nur die Stabilität untersucht werden soll, sei für den Rest der Aufgabe $u_{in}(t) = 0$.

3 a)* Zeichnen Sie ein Kleinsignalersatzschaltbild der Schaltung. Behalten Sie die Bezeichnungen der Spannungen und Ströme aus der Angabe bei.



b) Stellen Sie die Zustandsgleichungen der Schaltung auf. 4

$\dot{u}_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C} i_L \Rightarrow \boxed{\dot{u}_C = \frac{1}{C} i_L}$ √

$u_L = u_R - u_{Rin} - u_C = -g_m R(u_L + u_{Rin}) - Ri_C - u_C = -g_m R u_L - g_m R R_{in} i_C - Ri_c - u_C$
√

$u_L = \frac{-g_m R R_{in} i_C - Ri_C - u_C}{1+g_m R}$ √

$\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_L \boxed{\dot{i}_L = \frac{-g_m R R_{in} i_C - Ri_C - u_C}{L(1+g_m R)}}$ √

c) Geben Sie die Zustandsgleichungen in Matrixschreibweise an. 3

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L(1+g_m R)} & -\frac{R + g_m R R_{in}}{L(1+g_m R)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$ √√√

Für die weiteren Betrachtungen soll der Widerstand R_{in} als sehr klein angenommen werden. Er wird durch einen Kurzschluss ersetzt. Unter dieser Annahme ergeben sich die Eigenwerte der Systemmatrix zu

$$\lambda_1 = \frac{-RC + \sqrt{D}}{2LC(1+g_m R)}, \quad \lambda_2 = \frac{-RC - \sqrt{D}}{2LC(1+g_m R)} \quad \text{mit } D = R^2C^2 - 4LC(1+g_m R).$$

Im Folgenden soll anhand dieser Eigenwerte die Stabilität für verschiedene Parametrisierungen untersucht werden. Die Elementewerte g_m, R, C, L sollen als positiv angenommen werden.

d)* Welche Bedingung müssen die Eigenwerte eines stabilen Systems grundsätzlich erfüllen? 1

für alle Eigenwerte muss gelten: $\Re(\lambda) < 0$ √

Im Weiteren soll eine Fallunterscheidung durchgefürt werden.

Fall 1: zwei konjugiert komplexe Eigenwerte
Fall 2: zwei reelle Eigenwerte

1 e)* Geben Sie die Bedingung für D für Fall 1 und 2 an.

Fall 1: $D < 0$
Fall 2: $D > 0$ $\surd$

Zunächst soll nun Fall 1 betrachtet werden.

3 f) Bestimmen Sie den Realteil der komplexen Eigenwerte in Fall 1. Welches Vorzeichen hat dieser für positive Elementewerte? Was lässt sich also über die Stabilität des Systems aussagen?

$\Re(\lambda) = \frac{-RC}{2LC(1+g_m R)}$ $\surd$
$\Re(\lambda) < 0$ $\surd$
System ist stabil $\surd$

Aufgrund der komplexen Eigenwerte kann es zu resonanten Spannungsüberhöhungen kommen. Für den praktischen Einsatz als Verstärker ist ein System mit 2 reellen Eigenwerten vorzuziehen (Fall 2).

1 g)* Welcher der beiden Eigenwerte ergibt für positive Elementewerte im Fall 2 einen größeren Wert?

$\lambda_1 > \lambda_2$ $\surd$

3 h) Ist das System im Fall 2 für alle Parametrisierungen mit positiven Elementewerten stabil ? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

$\lambda_1 = \frac{-RC+\sqrt{R^2C^2-4LC(1+g_m R)}}{2LC(1+g_m R)} < 0$ $\surd$
$RC < \sqrt{R^2C^2 - 4LC(1+g_m R)}$ $\surd$
$1 < \sqrt{1 - \frac{4LC(1+g_m R)}{R^2C^2}}$
$1 < 1 - \frac{4L(1+g_m R)}{R^2C}$
$0 < \frac{4L(1+g_m R)}{R^2C}$
$0 < 1 + g_m R$
$-1 < g_m R$ ist für positive Elementewerte erfüllt, d.h. System ist stabil. $\surd$

Gegeben sei nun die normierte Zustandsgleichung für eine spezielle eine Dimensionierung der Schaltung. Die normierten Zustandsgrößen seien x_1 und x_2. Die normierte Zustandsgleichung ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i)* Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren quantitativ. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt. 5

$(-\lambda)(-\frac{5}{6}-\lambda)+\frac{1}{6}=0$ √

$6\lambda^2+5\lambda+1=0$

$\lambda_{1/2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-4*6}}{12}$

$\lambda_1=-\frac{1}{2}\ \lambda_2=-\frac{1}{3}$ √

$\underline{q_1}=\begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11}-\lambda_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ √

$\underline{q_2}=\begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11}-\lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}=c_2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ √

$\underline{x_0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ √

j) Zeichen Sie ein Phasenportrait unter Zuhilfenahme aller bisherigen Ergebnisse. 5