Aufgabe 2 Lineare dynamische Schaltung 2. Grades (30 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die lineare dynamische Schaltung 2. Grades aus Bild 2 untersucht werden.

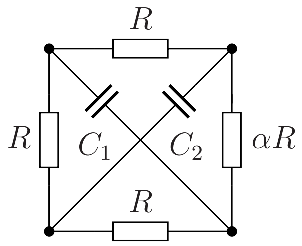


Bild 2: Lineare dynamische Schaltung 2. Grades

Durch geeignetes Umzeichnen läßt sich die Schaltung in folgende Ersatzschaltung überführen.

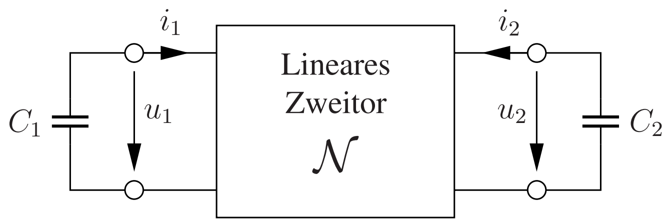


Bild 3: Ersatzschaltung

a)* Zeichnen Sie das fehlende lineare Zweitor $\mathcal{N}$ aus Bild 3.
Hinweis: Benennen Sie Knoten, um sich das Umzeichnen zu erleichtern!

b)* Welche **Torgrößen** bilden den Zustandsvektor?

c)* Berechnen Sie exemplarisch das Element y_{11} der $\boldsymbol{Y}$-Matrix. Beschreiben Sie in Worten die Bedeutung dieses Elements!

d) Ermitteln Sie aus den Zustandsgleichungen die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit von den Elementen der $\boldsymbol{Y}$-Matrix, d. h. y_{11}, y_{12}, y_{21} und y_{22}, sowie den Kapazitäten C_1 und C_2.

Im folgenden ist die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ mit den Elementewerten $C_1 = 1\,\mathrm{F}$, $C_2 = 0{,}5\,\mathrm{F}$ und $R = 1\,\Omega$ in Abhängigkeit des Parameters $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} (\beta - 1) & \beta \\ 2\beta & 2(\beta - 1) \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}$$

e)* Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ in Abhängigkeit des Parameters β.

f) Existieren Werte von β, so daß konjugiert komplexe Eigenwerte entstehen? Begründen sie Ihre Antwort durch Rechnung!

g) Untersuchen Sie die Stabilität der Schaltung und die Art der Gleichgewichtspunkte für die drei Fälle $\beta < 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$ und $\beta > 0{,}5$.

Für einen bestimmten Wert von β ergibt sich die Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ zu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{s}^{-1}. \tag{2}$$

h)* Berechnen Sie die Eigenwerte der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$.

i) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$.

j) Zeichnen Sie schließlich aus den gewonnenen Ergebnissen das Phasenportrait der Schaltung für den speziellen Fall der Zustandsmatrix $\boldsymbol{A}$ aus Gleichung (2) in Bild 4 ein.
Hinweis: Vergessen Sie nicht die Achsenbeschriftung!

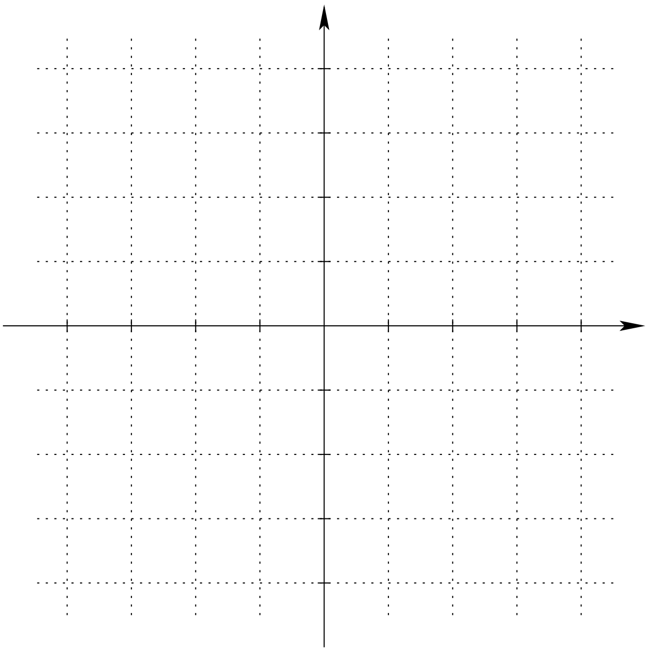
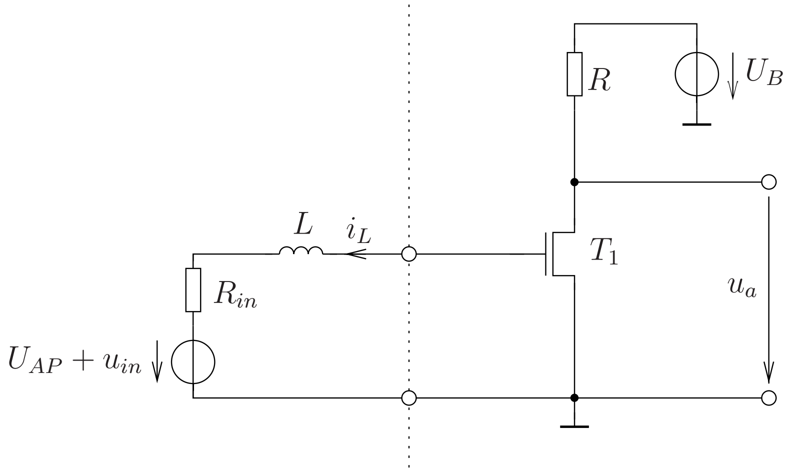


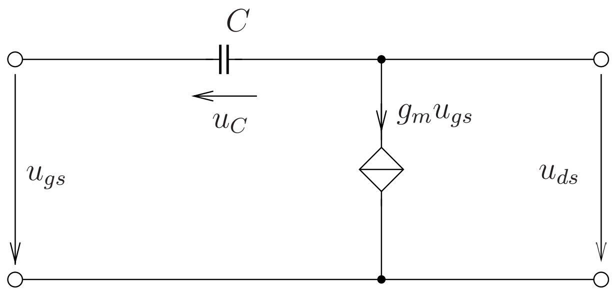
Bild 4: Phasenportrait

Aufgabe 2 Verstärker für einen induktiven Tonabnehmer (29 Punkte)

Im Verlauf dieser Aufgabe soll die Stabilität eines Gitarrenverstärkers betrachtet werden. Das Signal u_{in} wird dabei von einem induktiven Tonabnehmer erzeugt. Dieser kann mit der Serienschaltung einer Spannungsquelle mit Innenwiderstand und einer Spule modelliert werden. Es handelt sich um einen einstufigen Verstärker. Die Gleichspannungen U_B und U_{AP} dienen der Arbeitspunkteinstellung.



Bei dem verwendeten Transistor ist die parasitäre Gate-Drain Kapazität besonders groß. Diese soll deshalb bei der Modellierung berücksichtigt werden. Verwenden Sie für die weitere Aufgabe folgendes Kleinsignalersatzschaltbild für T_1.



Da in dieser Aufgabe nur die Stabilität untersucht werden soll, sei für den Rest der Aufgabe $u_{in}(t) = 0$.

a)* Zeichnen Sie ein Kleinsignalersatzschaltbild der Schaltung. Behalten Sie die Bezeichnungen der Spannungen und Ströme aus der Angabe bei.

b) Stellen Sie die Zustandsgleichungen der Schaltung auf.

c) Geben Sie die Zustandsgleichungen in Matrixschreibweise an.

Für die weiteren Betrachtungen soll der Widerstand R_{in} als sehr klein angenommen werden. Er wird durch einen Kurzschluss ersetzt. Unter dieser Annahme ergeben sich die Eigenwerte der Systemmatrix zu

$$\lambda_1 = \frac{-RC + \sqrt{D}}{2LC(1 + g_m R)}, \quad \lambda_2 = \frac{-RC - \sqrt{D}}{2LC(1 + g_m R)} \quad \text{mit } D = R^2C^2 - 4LC(1 + g_m R).$$

Im Folgenden soll anhand dieser Eigenwerte die Stabilität für verschiedene Parametrisierungen untersucht werden. Die Elementewerte g_m, R, C, L sollen als positiv angenommen werden.

d)* Welche Bedingung müssen die Eigenwerte eines stabilen Systems grundsätzlich erfüllen?

Im Weiteren soll eine Fallunterscheidung durchgefürt werden.

Fall 1: zwei konjugiert komplexe Eigenwerte
Fall 2: zwei reelle Eigenwerte

e)* Geben Sie die Bedingung für D für Fall 1 und 2 an.

Zunächst soll nun Fall 1 betrachtet werden.

f) Bestimmen Sie den Realteil der komplexen Eigenwerte in Fall 1. Welches Vorzeichen hat dieser für positive Elementewerte? Was lässt sich also über die Stabilität des Systems aussagen?

Aufgrund der komplexen Eigenwerte kann es zu resonanten Spannungsüberhöhungen kommen. Für den praktischen Einsatz als Verstärker ist ein System mit 2 reellen Eigenwerten vorzuziehen (Fall 2).

g)* Welcher der beiden Eigenwerte ergibt für positive Elementewerte im Fall 2 einen größeren Wert?

h) Ist das System im Fall 2 für alle Parametrisierungen mit positiven Elementewerten stabil ? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

Gegeben sei nun die normierte Zustandsgleichung für eine spezielle eine Dimensionierung der Schaltung. Die normierten Zustandsgrößen seien x_1 und x_2. Die normierte Zustandsgleichung ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i)* Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren quantitativ. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt.

j) Zeichen Sie ein Phasenportrait unter Zuhilfenahme aller bisherigen Ergebnisse.