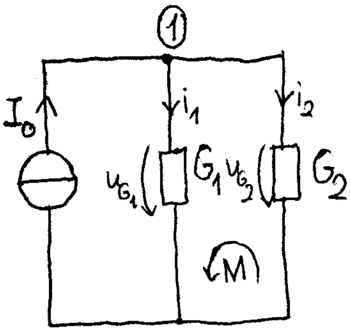
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 1

A1)

a) Teil A:



KVL (Masche M): $u_{G_1} - u_{G_2} = 0 \Leftrightarrow u_{G_1} = u_{G_2}$

KCL (Knoten 1): $i_1 + i_2 - I_0 = 0 \Leftrightarrow i_1 + i_2 = I_0$

Ohmsches Gesetz: $i_1 = G_1 \cdot u_{G_1}$, $i_2 = G_2 \cdot u_{G_2} = G_2 \cdot u_{G_1}$

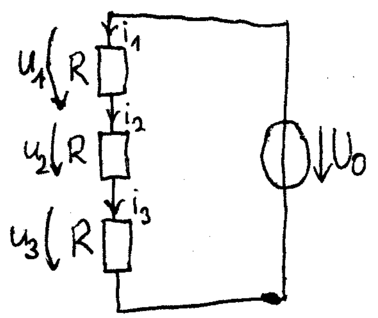
Wir suchen i_1. Aus KCL: $i_1 = I_0 - i_2$.

Außerdem: $u_{G_1} = \frac{i_2}{G_2} \Rightarrow i_2 = G_2 \cdot \frac{i_1}{G_1}$

$\Rightarrow i_1 + \frac{G_2}{G_1} \cdot i_1 = I_0 \Rightarrow i_1\left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) = I_0$

$\Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot I_0}$ Sinn der Schaltung = Stromteiler

b) Teil B mit $R_1 = R_2 = R_3 = R$



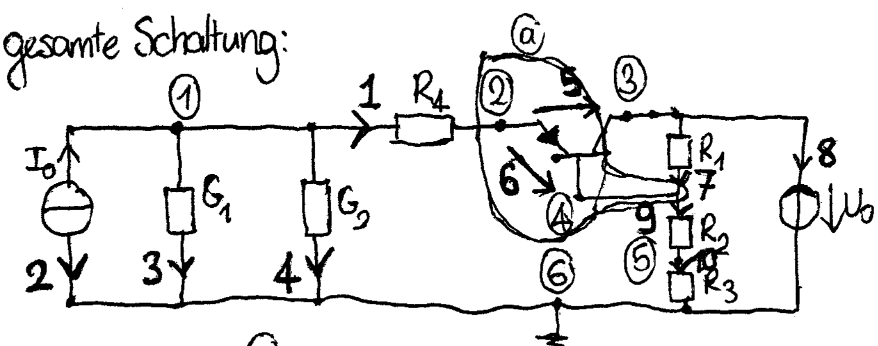
KVL: $u_1 + u_2 + u_3 = U_0$

KCL: $i_1 = i_2 = i_3$

Ohmsches Gesetz $u_1 = R \cdot i_1$, $u_2 = R \cdot i_2$, $u_3 = R \cdot i_3$ $\Rightarrow$ in diesem Spezialfall (Gleichheit der Widerstände) gilt: $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{U_0}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{u_1}{U_0} = \frac{1}{3}}$. $\rightarrow$ im Allgemeinen $R_1 \neq R_2 \neq R_3$ $\boxed{u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot U_0}$ Sinn der Schaltung = Spannungsteiler.

c) gesamte Schaltung:



Zweignummerierung

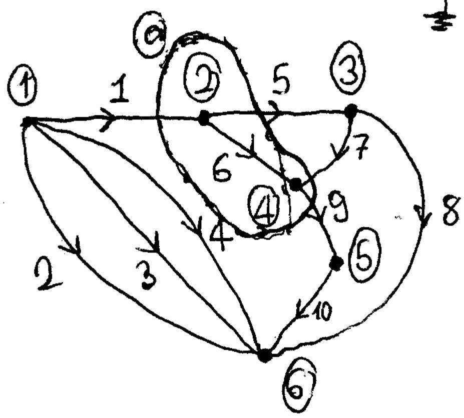
1: 1-2, 2,3,4 1-6

5: 2-3 6: 2-4 (Bei Dreipol willkürlich 2)

7: 3-4 8: 3-6

9: 4-5 10: 5-6

Digraph:



d) i_j seien zu den [redacted] Zweigen $j=1,\dots,10$ gehörige Ströme.

KCL: [redacted] rausgehende Ströme (+), reingehende Ströme (−)

① $+i_1+i_2+i_3+i_4=0$ ② $-i_1+i_5+i_6=0$ ③ $-i_5+i_7+i_8=0$ ④ $-i_6-i_7+i_9=0$

⑤ $-i_9+i_{10}=0$ ⑥ $-i_2-i_3-i_4-i_8-i_{10}=0$ ⓐ [redacted] $-i_1+i_5-i_7+i_9=0$

e) in $\underset{\sim}{A}'$ alle KCL-Gleichungen der Knoten (aber nicht Superknoten) schreiben.

$$\underset{\sim}{A}' = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \text{Zweige} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccc} +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow ① \\ \leftarrow ② \\ \leftarrow ③ \\ \leftarrow ④ \\ \leftarrow ⑤ \\ \leftarrow ⑥ \\ \uparrow \text{Knoten} \end{array}$$

Größe von $\underset{\sim}{A}'$: $n \times b$

f) n = Anzahl der Knoten = 6 $\Rightarrow$ $n-1=5$ linear unabhängige (Knoten) KCL-Gleichungen

b = Anzahl der Zweige = 10 $b-(n-1)=5$ linear unabhängige Maschengleichungen

g) Wir haben in $\underset{\sim}{A}'$ $n=6$ Gleichungen, aber benötigt sind nur $n-1=5$ Gleichungen.

$\Rightarrow$ eine willkürliche Zeile streichen.

! Aber hier nicht willkürlich, da der Bezugsknoten schon in der Aufgabenstellung gegeben wird. Deswegen hier den Bezugsknoten [redacted] ⑥ entsprechende Zeile streichen. Falls es nicht gegeben wäre, würde man irgendein Knoten als Bezugsknoten wählen und damit arbeiten !

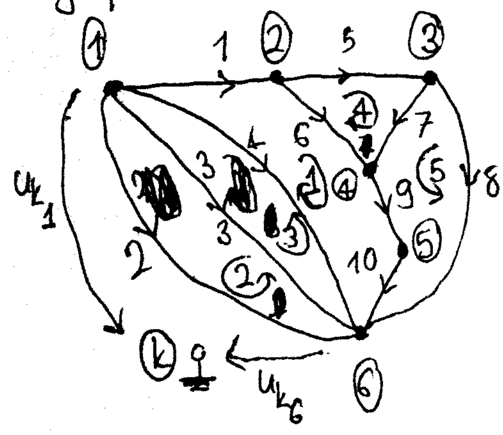
$\Rightarrow$ also Zeile 6 von $\underset{\sim}{A}'$ streichen.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \text{Zweige} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccc} +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Knoten} \downarrow \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \end{array}$$

Größe von $\underset{\sim}{A}$: $(n-1) \times b$

h) Wir brauchen $b-(n-1)=10-(6-1)=5$ Schleifen.

Digraph nochmal:



KVL-Gleichungen (u_J sei zum Zweig J gehörige Spannung)

(+) in Richtung der Masche

(-) gegen Richtung der Masche

Masche 1: $+u_1-u_4+u_6+u_9+u_{10}=0$

Masche 2: $+u_2-u_3=0$

Masche 3: $+u_3-u_4=0$

Masche 4: $+u_5-u_6+u_7=0$

Masche 5: $+u_7-u_8+u_9+u_{10}=0$

i) geschickt:

$$\underset{\sim}{M}'=\underset{\sim}{A}'^T=\begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

oder alle Zweigspannungen durch die Differenz der Knotenspannungen ausdrücken.

u_{k_i} definiert die Spannung zwischen dem Knoten (i) und Bezugsknoten (k). (siehe Digraph oben)

also gehe so vor:

$u_1=u_{①②}=u_{k_1}-u_{k_2}$

$u_2=u_{k_1}-u_{k_6}$

$u_3=u_{k_1}-u_{k_6}$

$u_4=u_{k_1}-u_{k_6}$

$u_5=u_{k_2}-u_{k_3}$

$u_6=u_{k_2}-u_{k_4}$

$u_7=u_{k_3}-u_{k_4}$

$u_8=u_{k_3}-u_{k_6}$

$u_9=u_{k_4}-u_{k_5}$

$u_{10}=u_{k_5}-u_{k_6}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{M}'=\begin{array}{c} \text{Knoten}\rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} & \text{Zweige}\downarrow \\ \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

<u>Bemerkung:</u>

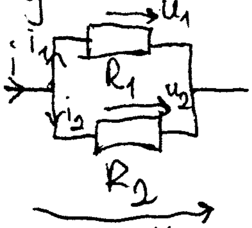
In unserer Aufgabe ist Knoten ⑥ selber der Bezugsknoten, deswegen gilt $u_{k_6}=0V$. Das heißt, dass die Spalte 6 der Matrix $\underset{\sim}{M}'$ fällt weg und es entsteht dadurch die Matrix $\underset{\sim}{M}$. Man würde dann leicht merken, dass $\underset{\sim}{A}^T=\underset{\sim}{M}$ gilt.

A2) • Parallelschaltung zweier Widerstände: $R_{ges} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

$u_1 = u_2 = u$

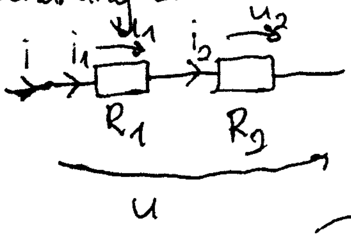
$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2}$

$\Rightarrow u = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \cdot i$



$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

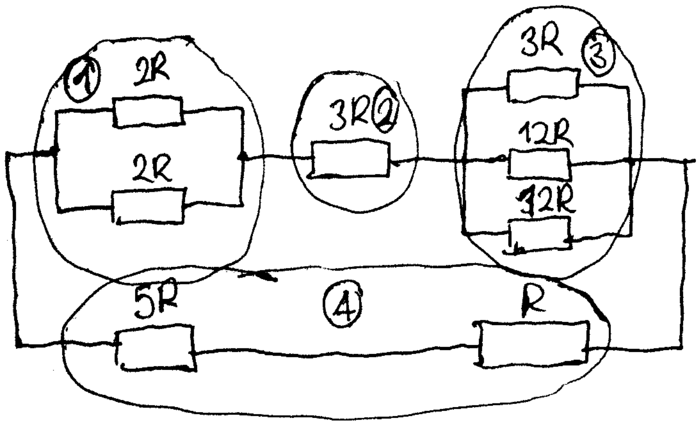
• Reihenschaltung zweier Widerstände:



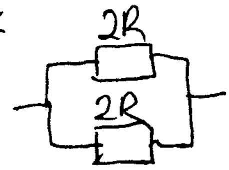
$R_{ges} = R_1 + R_2$

$u = u_1 + u_2 = i_1 R_1 + i_2 R_2 = i\underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{ges}}$

a)



$\Rightarrow$ Block ①

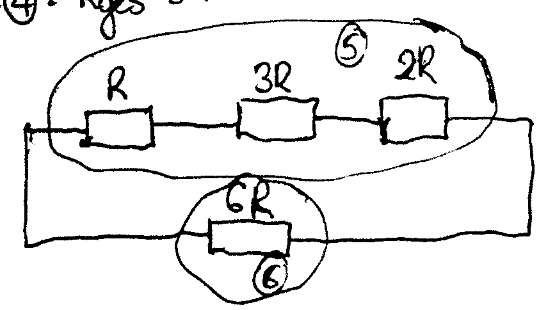


$R_{ges} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = \frac{4R^2}{4R} = R$

Block ②: $R_{ges} = 3R$, Block ③: $R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{12R} + \frac{1}{12R}} = \frac{1}{\frac{6}{12R}} = \frac{12R}{6} = 2R$

Block ④: $R_{ges} = 5R + R = 6R$

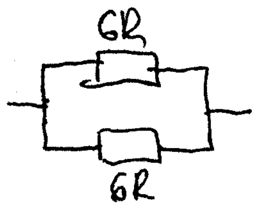
$\Rightarrow$



Block ⑤: $R_{ges} = R + 3R + 2R = 6R$

Block ⑥: $R_{ges} = 6R$

$\Rightarrow$



Gesamtschaltung: $R_{ges} = \frac{6R \cdot 6R}{6R + 6R} = 3R$ //