

31 Aufgabe 1 Operationsverstärker (31 Punkte)

Zuerst soll folgende Schaltung mit einem Operationsverstärker, linearen Widerständen und idealen Dioden untersucht werden.

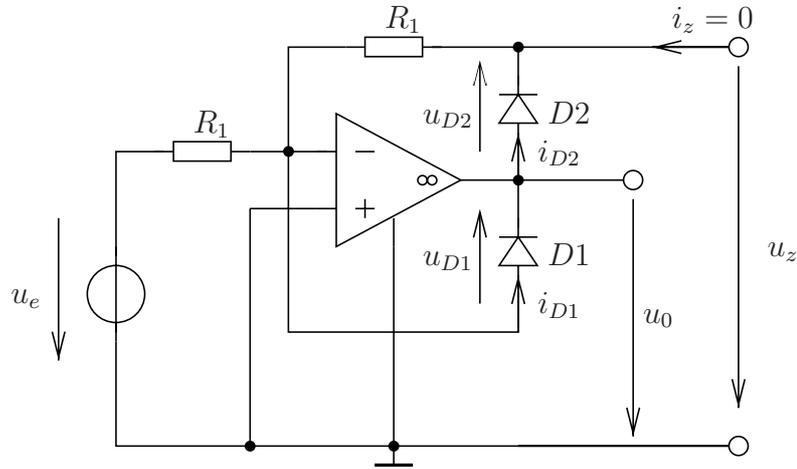


Bild 1. Zener mit einem Operationsverstärker

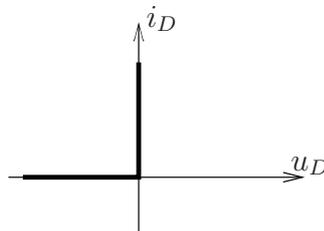
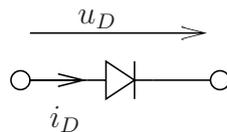
Folgende Fälle sind zu untersuchen:

Fall 1: Diode D1 sperrt ($u_{D1} < 0$), Diode D2 leitet ($i_{D2} > 0$)

Fall 2: Diode D1 leitet ($i_{D1} > 0$), Diode D2 sperrt ($u_{D2} < 0$)

Hinweis: Wenn nicht anders angegeben befindet sich der Operationsverstärker im streng linearen Bereich.

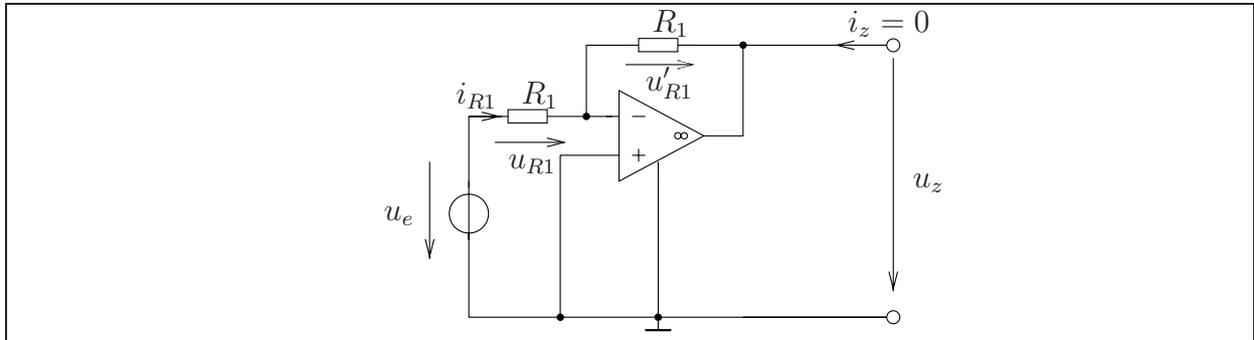
1 a)* Geben Sie die Kennlinie einer idealen Diode an.



Zuerst soll **Fall 1** untersucht werden:

b)* Zeichnen Sie für den **Fall 1** ein Ersatzschaltbild der Schaltung. Berücksichtigen Sie dabei, dass eine ideale Diode abhängig von ihrem Betriebsbereich als Kurzschluss oder Leerlauf modelliert werden kann.

2



c)* Wie hängt im **Fall 1** die Spannung u_z von u_e ab?

1

$$u_z = -u_e \text{ (invertierender Verstärker)}$$

d)* Welche Bedingung muss u_e erfüllen, damit **Fall 1** (D1 sperrt, D2 leitet) eintritt? (Begründung!)

2

Hinweis: Wählen Sie den Bereich der Spannung u_e so, dass es zu *keinen* Widersprüchen kommt!

$i_{D2} > 0 \checkmark \Rightarrow i_{R1} < 0 \Rightarrow u_e < 0 \checkmark$ (damit ist $\Rightarrow u_z > 0$ und Strom durch rückgekoppelten Widerstand hat die korrekte Orientierung für eine leitende Diode D2!)

oder

$$u_{D1} < 0 \Rightarrow u_{D1} = u'_{R1} < 0 \Rightarrow i'_{R1} < 0 \Rightarrow u_{R1} < 0 \Rightarrow u_e < 0$$

e) Für welche Spannungen u_e befindet sich der Operationsverstärker für **Fall 1** in Sättigung? Bestimmen Sie zuerst wie groß u_z im Fall 1 ist.

4

$$u_z = U_{\text{sat}} \checkmark, \text{ da } u_z > 0 \text{ für } u_e < 0 \text{ im Fall 1 } \checkmark \Rightarrow u_d > 0 \text{ (positive Sättigung)}$$

Bestimmung des Sättigungsbereichs bzgl. der Eingangsspannung:

$$(1) u_d + u_e - u_{R1} = 0 \text{ KVL}$$

$$(2) u_{R1} = \frac{u_e - u_z}{2} \text{ KVL } \checkmark$$

$$u_d = -u_e/2 - U_{\text{sat}}/2 > 0$$

$$u_e < -U_{\text{sat}} \checkmark$$

- 2 f) *Nur für diese Teilaufgabe* werden die Dioden D1 und D2 durch folgendes stückweise lineares Ersatzschaltbild (Bild 2) mit der Durchlassspannung U_s beschrieben. Wie ändert sich im **Fall 1** die Spannung u_z im Vergleich zu der Lösung in Teilaufgabe c) ? (Begründung!)

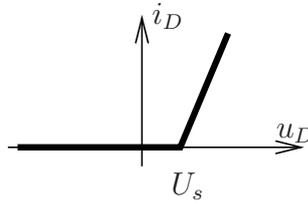
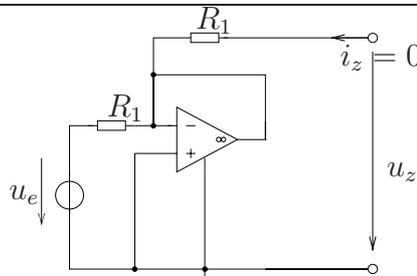


Bild 2. Stückweise lineares ESB

Die Spannung u_z ändert sich nicht ✓, da sie nur von dem Spannungsabfall am rückgekoppelten Widerstand R_1 abhängt ✓ und nicht von der Spannung an der Diode D2 im Durchlassbereich.

Jetzt soll **Fall 2** untersucht werden. Verwenden Sie jetzt auch wieder das Modell der idealen Diode für die beiden Dioden in Bild 1.

- 2 g)* Zeichnen Sie für den **Fall 2** ein Ersatzschaltbild der Schaltung. Berücksichtigen Sie dabei, dass eine ideale Diode abhängig von ihrem Betriebsbereich als Kurzschluss oder Leerlauf modelliert werden kann.



- 1 h)* Wie hängt im **Fall 2** die Spannung u_z von u_e ab?

$u_z = 0$, da kein Strom über rückgekoppelten Widerstand R_1 fließt.

i)* Welche Bedingung muss u_e erfüllen, damit **Fall 2** eintritt? (Begründung!)

2

Hinweis: Wählen Sie den Bereich der Spannung u_e so, dass es zu *keinen* Widersprüchen kommt!

$$i_{D1} > 0 \Rightarrow i_{R1} > 0 \checkmark \Rightarrow u_e \geq 0 \checkmark$$

Damit ist Richtung des Stromes durch D1 konsistent mit Stromrichtung über Widerstand R_1 und das KCL am Knoten mit Nullator erfüllt (somit kein Widerspruch in Schaltung mit Kirchhoff Gesetzen und Gleichungen der Netzwerkelemente).

Alternative Lösung mit $u_{D2} < 0$ möglich.

j) Gibt es einen Bereich von Spannungen u_e , für die sich der Operationsverstärker für **Fall 2** in Sättigung befindet? Wie groß ist u_z ?

4

$$u_d < 0 \Rightarrow u_0 = -U_{\text{sat}}$$

$$\text{KVL: } u_e + u_d - u_{R1} = 0$$

$$\text{KVL: } u_{R1} = u_e + U_{\text{sat}} \checkmark$$

$\Rightarrow u_d = U_{\text{sat}} > 0 \Rightarrow$ Widerspruch \checkmark , d.h. Schaltung wird nie in negative Sättigung kommen \checkmark .

$$\Rightarrow u_z = 0 \checkmark$$

oder

$$\text{Annahme: } u_0 = -U_{\text{sat}} \text{ und } u_d < 0$$

da $u_z = u_0$ und $u_z = -u_d$ folgt daraus $u_d > 0 \Rightarrow$ Widerspruch!

oder (am einfachsten)

Wann ist $u_0 = -U_{\text{sat}}$ für $u_e > 0$? Da $u_z = u_0 = 0$ im linearen Bereich \Rightarrow OpAmp wird für Fall 2 nie in Sättigung betrieben.

k)* Warum können nicht beide Dioden leiten, d.h. Strom durch Dioden positiv?

2

Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass die Annahme "beide Dioden leiten" zu einem Widerspruch mit dem Kirchhoffschen Spannungsgesetz führt.

Annahme: Dioden D1 und D2 leiten

$$i_{D2} > 0 \Rightarrow i'_{R1} < 0 \Rightarrow u'_{R1} < 0 \Rightarrow \text{bei Leerlauf am Ausgang } u_z > 0$$

Ein Umlauf über D1, D2 und R_1 ergibt aber, dass die Spannung u'_{R1} am rückgekoppelten Widerstand Null sein müsste $\Rightarrow u_z = 0, \Rightarrow$ Widerspruch!

oder

$$i_z = 0 \text{ und } i_{D2} > 0 \Rightarrow i_{D2}R_1 = u_z > 0$$

ausserdem wirken Diode 1 und 2 als Kurzschluss, d.h. $u_0 = u_z$ und $u_0 = 0 \Rightarrow u_z = 0 \Rightarrow$ Widerspruch!

Die Schaltung aus Bild 1 wird jetzt als Teilkomponente folgender Schaltung verwendet.

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie folgende Annahme treffen: Die abschnittsweise definierte Beschreibung der Schaltung in Bild 1 aus dem ersten Teil der Aufgabe ist auch noch nach Einbau in die Schaltung in Bild 3 gültig!

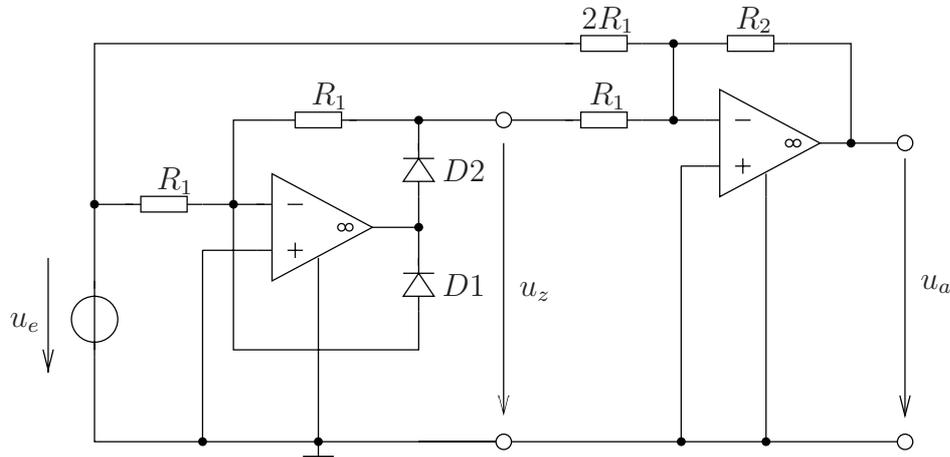


Bild 3. Gesamtes Zweitor mit zwei Operationsverstärkern

- 2) 1)* Geben Sie u_a in Abhängigkeit von u_e und u_z an.

invertierender Addierer

$$u_a = -\frac{R_2}{R_1}u_z - \frac{R_2}{2R_1}u_e \quad \checkmark\checkmark$$

- 3) m) Wie hängt u_a von u_e ab? Berücksichtigen Sie dazu Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben c), h) und l).

$u_z = -u_e$ im Fall 1 und $u_z = 0$ im Fall 2
 \Rightarrow Fall 1: $u_a = \frac{u_e}{2R_1}R_2$ mit $u_e < 0$ \checkmark
 Fall 2: $u_a = -\frac{u_e}{2R_1}R_2$ mit $u_e > 0$ \checkmark 1 Punkt für Fallunterscheidung \checkmark
 $\Rightarrow u_a = -\left|\frac{u_e}{2R_1}R_2\right|$

n) In Bild 4 ist ein zeitlicher Verlauf der Spannung u_e vorgegeben. Zeichnen Sie in das gleiche Bild den resultierenden Verlauf der Ausgangsspannung u_a für $R_1 = R_2$ ein.

2

1 Punkt für Form (Vorzeichen!), 1 Punkt für richtige Amplitude

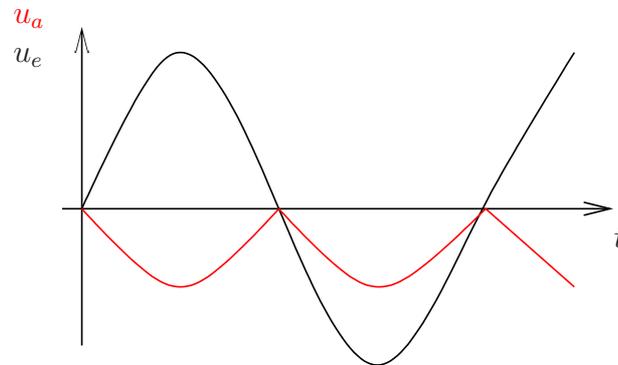


Bild 4.

o) Wie nennt man eine Schaltung mit dieser Funktionsweise?

1

Zweiweggleichrichter oder Gleichrichter oder invertierender Vollweggleichrichter

32

Aufgabe 2 Operationsverstärker (32 Punkte)

Es soll die in Bild 5 gezeigte Schaltung, bestehend aus ohmschen Widerständen, Dioden und idealen Operationsverstärkern untersucht werden.

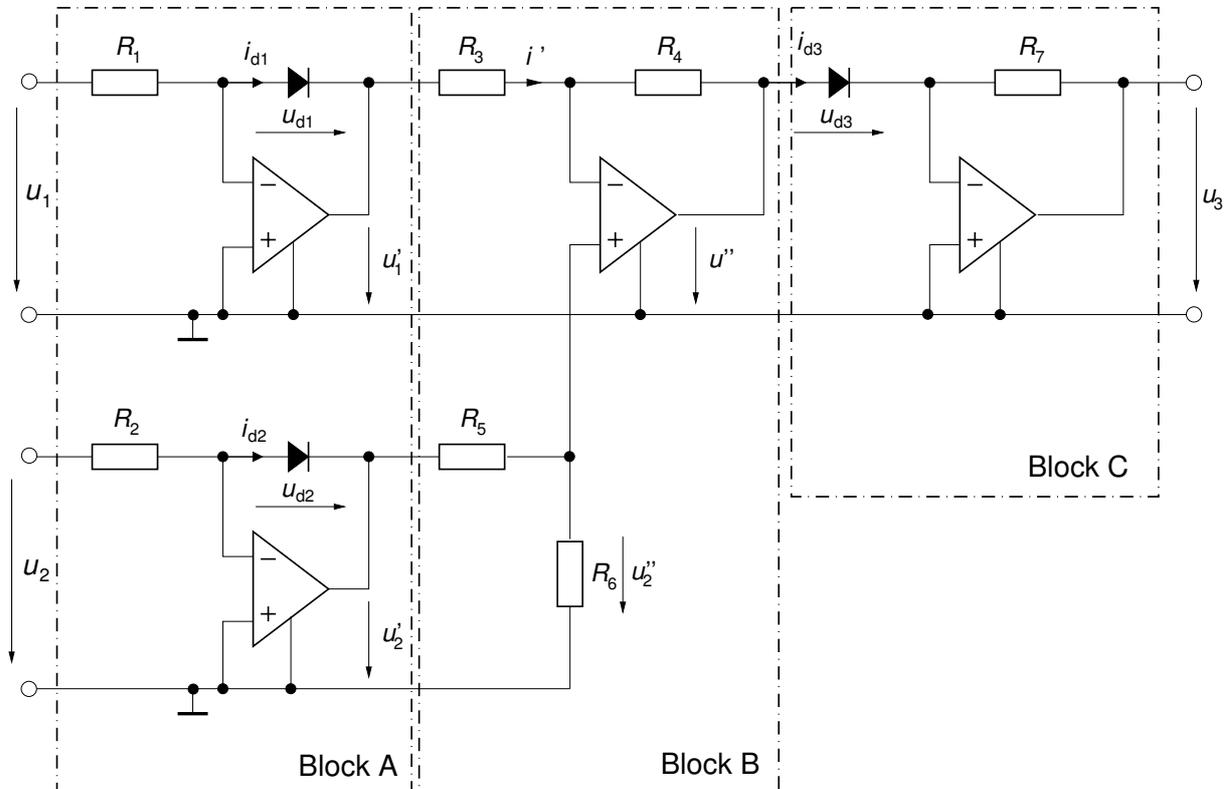


Bild 5. Zu untersuchende Schaltung

Die drei Dioden haben identische Strom-Spannungs-Kennlinien gemäß

$$i_d = I_S \cdot \left(\exp\left(\frac{u_d}{U_T}\right) - 1 \right) \approx I_S \cdot \exp\left(\frac{u_d}{U_T}\right), \quad (1)$$

wobei I_S den Sperrsättigungsstrom und U_T die Temperaturspannung bedeuten.

Nehmen Sie in der gesamten Aufgabe an, daß $i_d \gg I_S$ gilt, und verwenden Sie die in (1) angegebene Näherung.

Die Schaltung läßt sich in drei funktionale Blöcke (Block-A, Block-B und Block-C in Bild 5) unterteilen, die im folgenden untersucht werden sollen. Stets gilt für die Eingangsspannungen

$$u_1 > 0, \quad u_2 > 0.$$

Desweiteren dürfen alle Operationsverstärker im streng linearen Bereich angenommen werden.

Wir betrachten zunächst den ersten funktionalen Block (Block A in Bild 5).

a)* Geben Sie die Diodenspannungen u_{d1} und u_{d2} als Funktion der Diodenströme i_{d1} und i_{d2} an.

2

$$i_d = I_S \cdot \exp\left(\frac{u_d}{U_T}\right)$$

$$\Rightarrow u_{d1} = U_T \cdot \ln\left(\frac{i_{d1}}{I_S}\right)$$

$$\Rightarrow u_{d2} = U_T \cdot \ln\left(\frac{i_{d2}}{I_S}\right)$$

b)* Geben Sie die Diodenströme i_{d1} und i_{d2} als Funktion der Eingangsspannungen und der Bauteilwerte an.

2

$$i_{d1} = \frac{u_1}{R_1}$$

$$i_{d2} = \frac{u_2}{R_2}$$

c) Geben Sie die Spannungen u'_1 und u'_2 in Abhängigkeit der Eingangsspannungen u_1 und u_2 und der Bauteilwerte an.

2

$$u'_1 = -u_{d1} = -U_T \cdot \ln\left(\frac{i_{d1}}{I_S}\right) = -U_T \cdot \ln\left(\frac{u_1}{R_1 I_S}\right)$$

$$u'_2 = -u_{d2} = -U_T \cdot \ln\left(\frac{i_{d2}}{I_S}\right) = -U_T \cdot \ln\left(\frac{u_2}{R_2 I_S}\right)$$

1 d) Welche Funktion wird durch den Block A ausgeführt?

Logarithmierung der Eingangsspannungen

Im folgenden soll nun der Block-B untersucht werden.

1 e)* Welche Funktion wird von Block-B augenscheinlich übernommen?

Differenzverstärkung

5 f)* Geben Sie die Spannung u'' als Funktion von u'_1 , u'_2 und den Bauteilwerten an.

Mit dem Überlagerungssatz gilt:

$$u'' = -\frac{R_4}{R_3} u'_1 + \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{R_3 + R_4}{R_3} \cdot u'_2$$

Die Schaltung soll so ausgelegt werden, daß gilt:

$$u'' = u'_2 - u'_1. \quad (2)$$

g) Zeigen Sie, daß für die Widerstandsverhältnisse dabei gelten muß

3

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_6}{R_5} = 1. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u'' &= -\frac{R_4}{R_3} u'_1 + \frac{R_6}{R_5 + R_6} \frac{R_3 + R_4}{R_3} \cdot u'_2 \\ &= -u'_1 + u'_2 \quad (\text{nach Forderung}) \\ \Rightarrow \frac{R_4}{R_3} &= 1 \quad \Rightarrow \frac{R_6}{R_5 + R_6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{R_6}{R_5} = 1 \end{aligned}$$

Schließlich wenden wir uns dem Block-C zu.

h)* Geben Sie die Diodenspannung u_{d3} als Funktion von u'' an

1

$$u_{d3} = u''$$

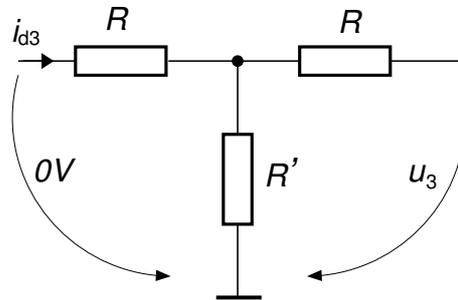
Die Ausgangsspannung u_3 kann wie folgt geschrieben werden:

$$u_3 = -U_0 \cdot \frac{u_1}{u_2}. \quad (4)$$

5 i) Berechnen Sie die Spannung U_0 .

$$\begin{aligned} i_{d3} &= I_S \cdot \exp\left(\frac{u_{d3}}{U_T}\right) = I_S \cdot \exp\left(\frac{-u_1' + u_2'}{U_T}\right) \\ &= I_S \cdot \exp\left(\ln\left(\frac{u_1}{R_1 I_S}\right) - \ln\left(\frac{u_2}{R_2 I_S}\right)\right) = I_S \cdot \exp\left(\ln\left(\frac{u_1 R_2}{u_2 R_1}\right)\right) \\ &= I_S \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{u_1}{u_2} \\ u_3 &= -R_7 \cdot i_{d3} = -I_S R_7 \cdot \frac{R_2 u_1}{R_1 u_2} = -U_0 \frac{u_1}{u_2} \\ \Rightarrow U_0 &= I_S R_7 \cdot \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned}$$

Da der Sperrsättigungsstrom I_S in der Regel einen sehr geringen Wert hat (typisch $I_S \approx 10^{-14} \text{A}$) werden für R_2 und R_7 meist sehr hohe Werte benötigt, die in der Praxis schwer zu realisieren sind. Aus diesem Grunde wird nun der Widerstand R_7 ersetzt durch die Schaltung aus Bild 6.

Bild 6. Ersatz für den Widerstand R_7

j)* Zeigen Sie, daß bei idealem Operationsverstärker diese Schaltung effektiv einem Widerstand R_7 vom Wert

5

$$R_7 = R \left(2 + \frac{R}{R'} \right) \text{ entspricht.}$$

$$\text{KCL : } i_{d3} = \frac{-i_{d3}}{R'} + \frac{-i_{d3}R - u_3}{R}$$

$$u_3 = -i_{d3} \cdot R \left(2 + \frac{R}{R'} \right) = -i_{d3} R_7$$

$$\Rightarrow R_7 = R \left(2 + \frac{R}{R'} \right)$$

Die Schaltung in Bild 5 soll nun als Entzerrer eingesetzt werden. Am Ausgang eines nicht-linearen Verstärkers mit nominaler Verstärkung A , wird die Spannung

$$u_a = A \cdot U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u}{U_0} \right)^k$$

gemessen, wenn an seinem Eingang die Spannung $0 < u < U_0$ anliegt. Mit Hilfe der Schaltung aus Bild 5 soll die Spannung u_a entzerrt werden, so daß sich eine Spannung

$$u_3 = -A \cdot u$$

ergibt.

5 k)* Wie müssen die Spannungen u_1 und u_2 in Abhängigkeit von u_a , U_0 und A gewählt werden, damit dies gelingt?

Hinweis $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ für $|x| < 1$.

$$u_a = A \cdot U_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{u}{U_0} \right)^k = A \cdot U_0 \cdot \frac{u}{U_0 - u}, \quad 0 < u < U_0$$

$$\Rightarrow u = U_0 \cdot \frac{u_a}{u_a + A \cdot U_0}$$

$$\Rightarrow -A \cdot u = -U_0 \cdot \frac{u_a}{\frac{u_a}{A} + U_0} = u_3 = -U_0 \frac{u_1}{u_2}$$

$$\Rightarrow u_1 = \beta \cdot u_a, \quad u_2 = \beta \cdot \left(\frac{u_a}{A} + U_0 \right)$$

$\beta > 0$ (beliebig)

Aufgabe 4 Operationsverstärker (21 Punkte)

21

Es soll die in Bild 6 gezeigte Schaltung, bestehend aus ohmschen Widerständen, n-Kanal MOS Transistoren und idealen Operationsverstärkern, analysiert werden. Gesucht ist die Übertragungsfunktion von den Eingangsspannungen u_x und u_y zu der Ausgangsspannung u_a . Nehmen Sie in der gesamten Aufgabe an, dass die Eingangsspannungen positiv sind ($u_x > 0$ und $u_y > 0$), so dass die Transistoren im Sättigungsbereich sind, d.h. für die Drainströme gelte

$$i_{d,i} = \frac{\beta}{2}(u_{gs,i} - U_{th})^2 \text{ für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Desweiteren dürfen alle Operationsverstärker im streng linearen Bereich angenommen werden!

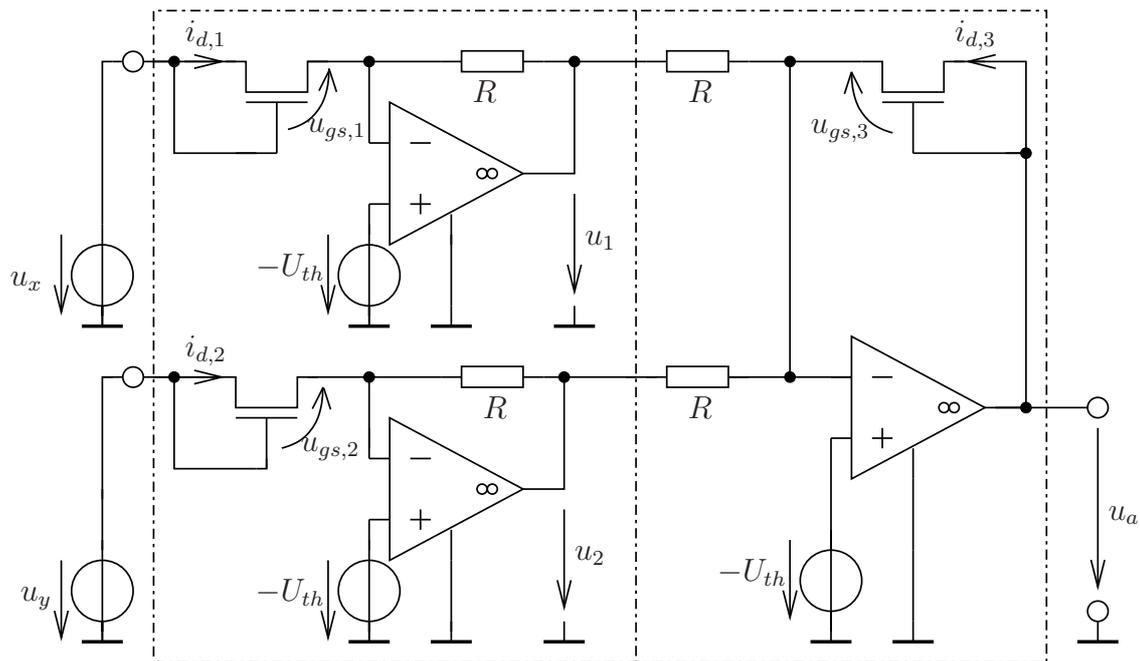


Bild 6. Zu untersuchende Schaltung

a)* Ist der Überlagerungssatz für diese Schaltung anwendbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

2

Nein ✓, da nicht lineare Elemente enthalten sind. ✓

Die Schaltung lässt sich in zwei funktionale Blöcke, wie in Bild 6 gezeigt ist, unterteilen, die im Folgenden untersucht werden sollen. Wir betrachten zunächst den funktionalen Block auf der linken Seite in Bild 6.

b)* Geben Sie die Gate-Source-Spannungen $u_{gs,1}$ und $u_{gs,2}$ als Funktion der Eingangsspannungen u_x , u_y und U_{th} an.

2

$u_{gs,1} = u_x + U_{th}$ ✓
 $u_{gs,2} = u_y + U_{th}$ ✓

- 2 c) Geben Sie die Drainströme $i_{d,1}$ und $i_{d,2}$ als Funktion der Eingangsspannungen u_x , u_y und der Bauteilwerte an.

$$i_{d,1} = \frac{\beta}{2} u_x^2 \checkmark$$

$$i_{d,2} = \frac{\beta}{2} u_y^2 \checkmark$$

- 2 d) Geben Sie die Spannungen u_1 und u_2 in Abhängigkeit der Eingangsspannungen u_x und u_y und der Bauteilwerte an.

$$u_1 = -R \frac{\beta}{2} u_x^2 - U_{th} \checkmark$$

$$u_2 = -R \frac{\beta}{2} u_y^2 - U_{th} \checkmark$$

- 4 e) Bestimmen Sie den zulässigen positiven Bereich für u_x und u_y , damit die beiden Operationsverstärker links nicht in negative Sättigung ($-U_{sat}$) übergehen. Stets gelte $u_x, u_y > 0$.

$$u_1 = -R \frac{\beta}{2} u_{x,y}^2 - U_{th} > -U_{sat} \checkmark \checkmark \Rightarrow u_{x,y} < \sqrt{\frac{2}{\beta R} (U_{sat} - U_{th})} \checkmark \checkmark$$

Nun wenden wir uns dem rechten Teil der Schaltung aus Bild 6 zu.

f)* Geben Sie den Strom $i_{d,3}$ als Funktion von u_1 und u_2 an. Stellen Sie dazu eine Knotengleichung auf.

2

$$\text{KCL: } i_{d,3} = -(u_1 + U_{th})/R - (u_2 + U_{th})/R \quad \checkmark\checkmark$$

g)* Geben Sie die Ausgangsspannung u_a als Funktion von $i_{d,3}$ an.

3

$$u_a = u_{gs,3} - U_{th} \checkmark = \sqrt{\frac{2i_{d,3}}{\beta}} + U_{th} - U_{th} = \sqrt{\frac{2i_{d,3}}{\beta}} \quad \checkmark\checkmark$$

h) Verwenden Sie Ihre bisherige Ergebnisse aus den Teilaufgaben d), f) und g), um die Ausgangsspannung u_a als Funktion von u_x und u_y zu bestimmen.

3

$$u_a = \sqrt{\frac{2i_{d,3}}{\beta}} = \sqrt{\frac{-2(u_1 + U_{th}) - 2(u_2 + U_{th})}{R\beta}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad \checkmark\checkmark\checkmark$$

i) Welche Funktion wird von der ganzen Schaltung ausgeführt?

1

Die Schaltung berechnet die Norm (Länge, Amplitude) eines Vektors. \checkmark

