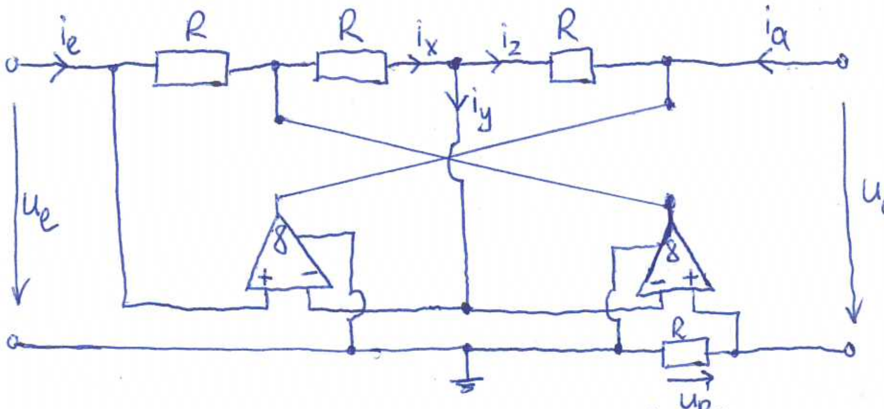
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 10

A1) Im Rahmen des letzten Übungsblatts (Nr. 9) haben wir ausgehend von einem realen Operationsverstärker hergeleitet, wie ein idealer Op-Amp sich verhält. Dabei haben wir die drei Arbeitsbereiche eines Op-Amps, nämlich negative Sättigung, linearer Bereich und positive Sättigung, diskutiert, indem wir die für jeweilige Bereiche geeigneten Ersatzschaltbilder bestimmt haben. Diese Ersatzschaltbilder sind essentielle Werkzeuge bei der Analyse der Operationsverstärker, die die Op-Amp-Schaltungen übersichtlicher machen und damit ihre Bearbeitung vereinfachen, wie wir letztes Mal an den Realisierungsmöglichkeiten eines Logarithmierers und eines Subtrahierers bemerkt haben. Dabei soll man aber sauber arbeiten und die Voraussetzungen jeweiliger Bereiche überprüfen, um für die Analyse richtiges ESB wählen zu können. Die Berücksichtigung dieser Voraussetzungen mittels Fallunterscheidungen haben wir im letzten Blatt bereits geübt.

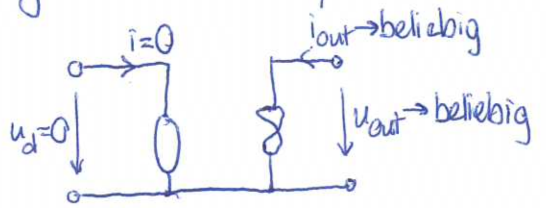
→ Ist aber von äußerer Beschaltung gewährleistet, dass der Operationsverstärker ausschließlich im streng linearen Bereich arbeitet, was im Rahmen der Schaltungstechnik 1-Aufgaben meistens von der Angabe abzulesen ist, dann kann man sich die Fallunterscheidung sparen und direkt mit Hilfe des Nullormodells mit der Analyse anfangen. In diesem Fall spricht man von den sogenannten „linearen Operationsverstärkerschaltungen", die auch im Rahmen eines Beispiels im Teil 1 dieses Übungsblatt kennengelernt werden.

a) Wir haben eine Schaltung mit zwei Op-Amps gegeben, die wir charakterisieren sollen:

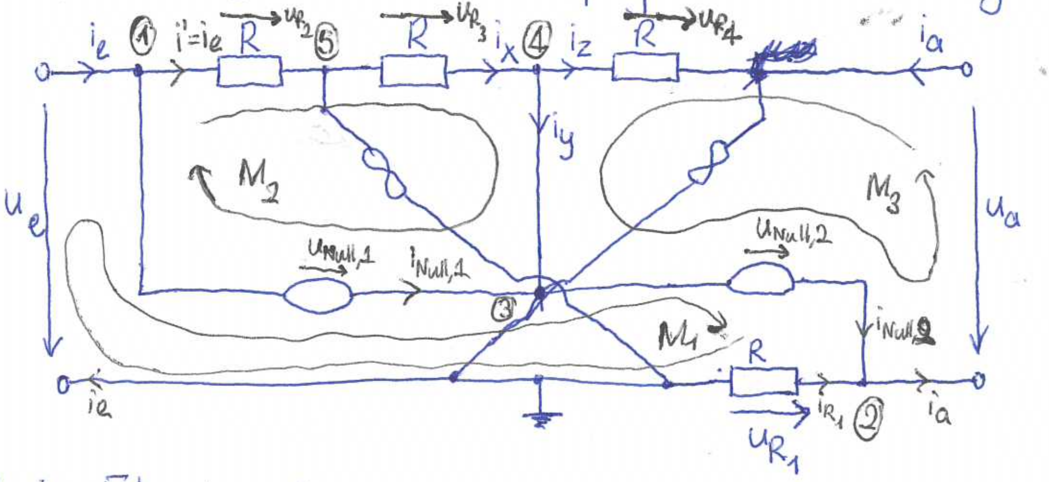



→ Anmerkung: Man beachte, dass die drei Drähte genau in der Mitte der Schaltung sich nicht berühren, d.h. es gibt kein Kontakt zwischen dieser 3 Zweige.

Die Angabe unter der Schaltung besagt, dass für alle Widerstände $R>0$ gilt und die beiden Op-Amps im <u>streng linearen Bereich</u> sind. Also geht es hier um eine lineare Op-Amp-Schaltung, d.h. wir dürfen die Fallunterscheidungen uns sparen und $u_d=0$ für beide Op-Amps annehmen. Das geeignete ESB der Operationsverstärker ist damit der Nullor:



Um die Teilaufgabe a) zu beantworten soll man also das Nullor-ESB für beide Op-Amps einsetzen und das resultierende Großsignal-ESB der Schaltung zeichnen:




→ Anmerkung: Alle schwarz gezeichnete Dinge sind Hilfskonstruktionen und sollen bei ESB nicht vorkommen.

b) Im Folgenden sollen wir einige Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgangsströme und -spannungen mittels KCL und KVL bestimmen, um die Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}$ dieses Zweitors zu finden. Dabei soll man wie immer die Maschen und Knoten über Nullatoren bevorzügen, da diese die Informationen $u_{Null}=0$ und $i_{Null}=0$ geben.

Um $u_e$ in Abhängigkeit von $u_{R_1}$ anzugeben soll man deswegen die Masche $M_1$ auswerten:

KVL bei $M_1$: $-u_{R_1}-u_e+\underbrace{u_{Null,1}}_{=0}+\underbrace{u_{Null,2}}_{=0}=0 \Rightarrow \boxed{u_e=-u_{R_1}}$

→ Man könnte hier ohne Auswertung der Masche $M_1$ direkt sehen, dass die Knoten ① und ② auf derselben Potential liegen (wegen Nullatoren) und deswegen $u_e=-u_{R_1}$ gilt.

c) Die Angabe besagt außer den vereinfachenden Annahmen, dass die Op-Amps im linearen Bereich sind, auch, dass die vorliegende Schaltung ein Zweitor ist. Das heißt, dass an beiden Toren die einfließenden Ströme gleichgroß zu den ausfließenden Strömen sind. Gemäß der Hinweis sollen wir diese Eigenschaft, die Torbedingung heißt, ausnutzen um $u_e$ in Abhängigkeit von R und $i_a$ zu bestimmen. Wir haben bei Teilaufgabe b) schon bestimmt, dass $u_e=-u_{R_1}$ gilt. Dabei sollen wir $u_{R_1}$ mithilfe R und $i_a$ eliminieren, was offensichtlich mit dem Ohmschen Gesetz erfolgen soll. Da zwischen der unteren Klemme von Eingang und dem Widerstand, worüber $u_{R_1}$ abfällt, zwei Noratoren angeschlossen sind, ist es nicht sinnvoll und sogar nicht möglich diesen Tor zu verwenden. Außerdem sollen wir in Abhängigkeit von $i_a$ einen Ausdruck bestimmen, deswegen ist die Torbedingung am Ausgang zu nutzen, ist sinnvoll. Schreibt man KCL beim Knoten ②:

KCL bei ②: $i_{R_1}+\underbrace{i_{Null,2}}_{=0}-i_a=0 \Rightarrow i_{R_1}=i_a$

Ohmsches Gesetz: $u_{R_1}=i_a\cdot R \Rightarrow u_e \overset{\text{Teilaufgabe b)}}{=} -u_{R_1}=-i_a R \Rightarrow \boxed{u_e=-i_a R}$

d) Der Wert von $i_y$ ist ganz einfach mittels KCL am Knoten ③ bestimmbar:

KCL bei ③: $\underbrace{i_{Null,1}}_{=0}+i_y-\underbrace{i_{Null,2}}_{=0}=0 \Rightarrow \boxed{i_y=0}$

e) Der Zusammenhang zwischen $i_z$ und $i_x$ erfolgt direkt mittels unserer Antwort aus d) und der KCL-Gleichung am Knoten ④:

KCL bei ④: $i_x - \underbrace{i_y}_{=0} - i_z = 0 \Rightarrow i_x = i_z \Rightarrow \boxed{i_z = i_x}$

f) Nun sollen wir die Beziehung zwischen $i_e$ und $i_x$ herleiten. Um $i_e$ überhaupt ins Spiel zu bringen, ist die einzige Möglichkeit KCL bei ①:

KCL bei ①: $i_e - \underbrace{i_{Null,1}}_{=0} - i' = 0 \Rightarrow i' = i_e$

Nun könnte man auf dem ersten Blick denken, dass die Beziehung $i_e, i_x$ einfach über KCL bei ⑤ herleitbar wäre. Das stimmt aber nicht, da an diesem Knoten ⑤ zusätzlich ein Norator angeschlossen ist und dadurch ein Strom beliebiger Größe fließt. Deshalb kann man mit dieser Knotengleichung nichts anfangen. Dabei hilft uns aber KVL bei der Masche $M_2$ und Ohmsches Gesetz:

KVL bei $M_2$: $u_{R_2} + u_{R_3} - \underbrace{u_{Null,1}}_{=0} = 0 \Rightarrow u_{R_2} = -u_{R_3}$

Ohmsches Gesetz: $u_{R_2} = i_e R$, $u_{R_3} = i_x R \Rightarrow i_e \cdot R = -i_x R \Rightarrow \boxed{i_e = -i_x}$

g) Jetzt soll für die Bestimmung von $i_e$ in Abhängigkeit von $u_a$ und $R$, die Kenntnisse aus Teilaufgaben d) bis f) verwendet werden. Deswegen lohnt es sich diese nochmal aufzuschreiben:

$i_y = 0$, $i_z = i_x$, $i_e = -i_x$.

Nun soll man die Masche $M_3$ ausnutzen um einen Ausdruck mit $u_a$ zu bekommen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{KVL bei } M_3\text{: } -u_a - u_{R_4} + \underbrace{u_{Null,2}}_{=0} = 0 \Rightarrow u_{R_4} = -u_a \\ \text{Ohmsches Gesetz: } u_{R_4} = i_z \cdot R \Rightarrow u_{R_4} \overset{i_z=i_x}{=} i_x \cdot R \overset{i_x=-i_e}{=} -i_e \cdot R \end{array}\right\} \Rightarrow -i_e \cdot R = -u_a \Rightarrow \boxed{i_e = \frac{u_a}{R}}$$

h) Die Kettenbeschreibung eines Zweitores lautet allgemein: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underline{a}\begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$.

In dieser Aufgabe sind die Torgrößen des Eingangs $u_e, i_e$ und die des Ausgangs $u_a, i_a$. In unserem Fall lautet die Kettenbeschreibung also; $\begin{bmatrix} u_e \\ i_e \end{bmatrix} = \underline{a}\begin{pmatrix} u_a \\ -i_a \end{pmatrix}$, deren Gleichungen wir in Teilaufgabe c) bzw. g) bestimmt haben:

$u_e = R \cdot (-i_a)$, $i_e = \frac{1}{R} \cdot u_a$

Deswegen lautet die Kettenmatrix, die wir in diesem Fall wegen strenger Linearität der Schaltung aufstellen dürfen:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}.$$

Vergleicht man diese Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}$ mit den der bekannten Zweitore im Skript oder im Klausurfall in der Formelsammlung, so sieht man, dass diese mit der Kettenmatrix eines Gyrators übereinstimmt, nämlich:

$$\underset{\sim}{A}_{Gyr} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}$$

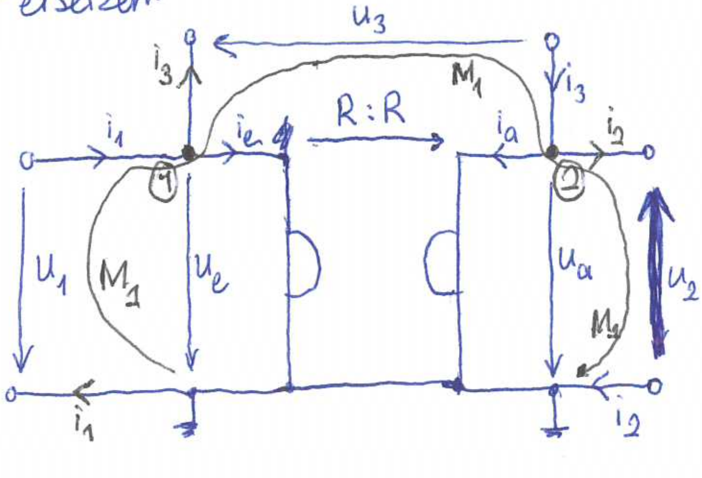
Diese Schaltung ist damit ein $\boxed{\text{Gyrator}}$, dessen charakterisierende Größe durch Vergleich der Matrizeneinträge sich zu $R_1 : R_2 = R : R$ ergibt.

Fazit: Die Schaltung im diesem Übungsblatt ist also eine Realisierungsmöglichkeit eines Gyrators mittels Operationsverstärker.

ii) Im Teil 2 dieser Aufgabe wird der Gyrator zu einem Dreitor verschaltet, das wir analysieren sollen. Da ein Dreitor ein Mehrtor gemäß der Klassifizierung des Skriptums ist, gehen wir kurz auf die Mehrtorkonzept ein.

Ein Mehrtor ist nichts anderes als eine Erweiterung der Zweitorkonzept, die wir bereits kennen. Auch bei einem Mehrtor sollen an allen Toren die Torbedingung erfüllt werden. Für ein p-Tor existieren 2p-Zustandsgrößen, analog zu 4 bei Zweitoren, nämlich p Torspannungen und p Torströme. Demnach liegt die Kennlinie eines p-Tors im 2p-dimensionalen Raum. Die Torspannungen und -Ströme dürfen wiederum als Vektoren zusammengefasst werden. Beispielsweise hat ein Viertor als Spannungsvektor: $\underline{u} = u_1, u_2, u_3, u_4]^T$. Völlig analog zu Zweitoren existieren die gleichen Beschreibungsformen auch hier. Bei einer Bildbeschreibung eines Fünftores hat beispielsweise die Matrix $\underset{\sim}{U}$ die Größe 5x5, oder falls existent ist die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}$ eines Zwanzigtores von der Größenordnung 20x20 usw.. Also gibt es auch in Mehrtorkonzept die implizite, parametrische und explizite Beschreibungsformen, oder anders gesagt Kern-, Bild-beschreibung oder Mehrtormatrizen. Auch die Überlegungen über Verschaltungen von Zweitore gelten hier analog.

In der vorliegenden Aufgabe haben wir ein Dreitor mit einem Blackbox drin, den wir aber schon im ersten Teil dieser Aufgabe charakterisiert haben. Deswegen können wir diesen Blackbox mit einem Gyrator ersetzen:



Kommt man richtig zur Teilaufgabe i), soll man $u_1, u_2$ in Abhängigkeit von $u_e, u_a$ angeben, was ganz einfach durch Augenschein bestimmt werden kann:

$\boxed{u_1 = u_e}$ & $\boxed{u_2 = -u_a}$

J) Jetzt sollen wir die Torströme des Gyrators in Abhängigkeit von der Torströme des Dreitors angeben. Dazu brauchen wir KCL-Gleichungen an den Knoten 1 und 2 und die Torbedingungen, die gelten sollen, da es in der Angabe steht, dass diese Schaltung ein Dreitor ist. Verwendet man diese und stellt die KCL an 1 und 2, so kommt:

KCL bei 1: $i_1 - i_3 - i_e = 0 \Rightarrow \boxed{i_e = i_1 - i_3}$

KCL bei 2: $i_3 - i_a - i_2 = 0 \Rightarrow \boxed{i_a = i_3 - i_2}$

k) Um diesen Zusammenhang zwischen den Torspannungen des Dreitors zu bestimmen, eignet sich offenkundig eine KVL-Gleichung über die Masche $M_1$:

KVL bei $M_1$: $-u_1 - u_3 - u_2 = 0 \Rightarrow \boxed{u_3 = -u_1 - u_2}$

l) Die Widerstandsbeschreibung eines Dreitors sieht analog zu den Zweitoren, im streng linearen Fall allgemein so aus:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{u} = \underline{r}(\underline{i})$$

(auch bei nicht linearem Fall gültig)

Um die Widerstandsmatrix, die wir wegen strenger Linearität aufstellen können, zu bestimmen, greifen auf unsere vorherige Ergebnisse zurück. Aus h) kennen wir die Kettenbeschreibung des Gyrators, also die Zusammenhänge zwischen $u_e, i_e$ und $u_a, i_a$:

$u_e = -R \cdot i_a \quad , i_e = \frac{1}{R} \cdot u_a$

Aus i), J) und k) wissen wir außerdem:

$u_1 = u_e \, , \, u_2 = -u_a \, , \, i_e = i_1 - i_3 \, , \, i_a = i_3 - i_2 \, , \, u_3 = -u_1 - u_2 .$

Da bei einer Widerstandsbeschreibung die Ströme die steuernden und Spannungen die gesteuerten Größen sind, sollen wir die Spannungen $u_1, u_2, u_3$ in Abhängigkeit von der Ströme $i_1, i_2, i_3$ darstellen.

$\Rightarrow u_1 = u_e = -R \cdot i_a \xrightarrow[\text{einsetzen}]{i_a = i_3 - i_2} u_1 = -R(i_3 - i_2) \Rightarrow u_1 = R \cdot i_2 - R \cdot i_3$ (≙ Gleichung 1)

$\Rightarrow u_2 = -u_a = -R \cdot i_e \xrightarrow[\text{einsetzen}]{i_e = i_1 - i_3} u_2 = -R(i_1 - i_3) \Rightarrow u_2 = -R \cdot i_1 + R \cdot i_3$ (≙ Gleichung 2)

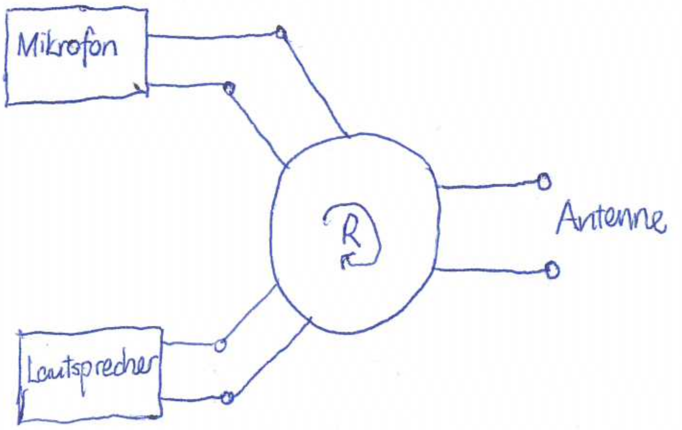
$\Rightarrow u_3 = -u_1 - u_2 \xrightarrow[\text{einsetzen}]{1,2} u_3 = -R \cdot i_2 + \cancel{R \cdot i_3} + R \cdot i_1 - \cancel{R \cdot i_3} \Rightarrow u_3 = R \cdot i_1 - R \cdot i_2$ (≙ Gleichung 3)

Die Widerstandsmatrix $\underset{\sim}{R}$ des Dreitors lautet also:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ R & -R & 0 \end{bmatrix}$$

Vergleicht man diese Matrix mit der der speziellen Mehrtore aus dem Skript, bzw. Formelsammlung, so sieht man, dass $\underset{\sim}{R}$ genau der Widerstandsmatrix eines Zirkulators entspricht. Also ist dieser Mehrtor ein <u>Zirkulator.</u>

→<u>Anmerkung:</u> Zirkulatoren sind wichtige Bauelemente, die wie der Name verrät, die Leistung im Schaltkreis zirkulieren. Dabei soll ein Zirkulator nicht nur aus drei Toren bestehen, sondern Zirkulatoren mit größeren Anzahl an Toren existieren auch. Analysiert man die Schaltung, indem man in ein Tor des Zirkulators mittels einer Quelle Leistung einprägt, so gibt der Zirkulator beim nächsten Tor diese gesamte Leistung, die am Tor 1 aufgenommen wird, ab und beim Tor 3 wird keine Leistung abgegeben. Diese Eigenschaft wird bei einem Telefon mit Mikrofon als Tor 1, Antenne als Tor 2 und Lautsprecher als Tor 3 verwendet. Spricht man bsp. zu dem Mikrofon so wird diese Leistung zu der Antenne also zum Vermittlungspartner abgegeben, aber es wird keine Leistung an den Lautsprecher abgegeben, was auch sinnlos wäre, dass man hört, was man selber ausspricht. Kommt vom Vermittlungspartner eine Leistung an die Antenne, so wird sie vollständig zum Lautsprecher abgegeben aber nicht zum Mikrofon. Die Darstellung dieses Prozesses sieht folgendermaßen aus:




Außerdem werden Zirkulatoren auch beim Hochfrequenztechnik in Radargeräten eingesetzt.