MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 11

Analyse der Schaltungen ist von zentraler Bedeutung für Elektrotechnik und bildet die Hauptaufgabe der Ingenieure. Mithilfe einer geeigneten Analyse spart man unglaublich viel Zeit und Geld, wenn man eine Schaltung entwerfen soll. Dafür gibt ja sogar eine Vorlesung „Entwurfsverfahren digitaler Schaltungen", wobei man zahlreiche Methoden kennenlernt, um digitale Schaltungen möglichst optimal zu entwerfen. In derselben Vorlesung geht es nicht nur um eine Voranalyse für den Entwurf, aber auch um die nachherige Analyse, nachdem die Schaltung aufgebaut wurde, um Fehler zu analysieren. Sogar im Bereich von Informationstechnik oder Mathematik gibt es auch ganz viele Themengebiete, die sich mit der Analyse zahlreicher Aspekte beschäftigen. Da wir im Rahmen der Vorlesung „Schaltungstechnik" uns mit Netzwerktheorie, also mit Schaltungen, die der Konzentriertheitshypothese genügen, beschäftigen, betrachten wir Verfahren, die besonders für solche Netzwerke geeignet sind. Dafür gibt es wiederum viele verschiedene Methoden, einerseits rechnergestützte numerische, andererseits symbolische, per Hand durchführbare. Wir betrachten ein spezielles Verfahren von zweiter Art (symbolisch), mit dem Schaltungen anhand ihrer Schaltungsdiagramme ganz elegant und relativ einfach charakterisiert, also ihre Verhalten untersucht werden können, nämlich „Knotenspannungsanalyse".

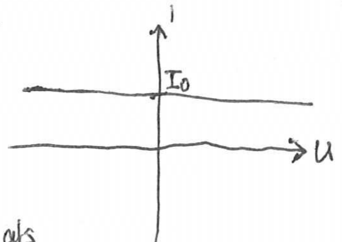
Seit dem Anfang dieses Tutoriums werden 10 Übungsblätter behandelt und man kann keins finden, wobei die vorliegenden Schaltungen per die Werkzeuge, KVL, KCL, bzw. Inzidenzmatrizen, die in der ersten Stunde eingeführt werden, nicht analysiert werden. Wir haben immer wieder Schaltungen mithilfe der Kenntnis von Bauelementegleichungen, KCL und KVL analysiert. Nun führen wir ein systematisches Verfahren, das was wir bisher gemacht haben, zusammenfasst und einfacher, kompakter anwenden lässt.

Wenn man die Vorschrift der reduzierten Knotenspannungsanalyse, ausgehend von den Werkzeugen aus Kapitel 2 des Skriptums, herleitet, worauf hier nicht eingegangen werden soll, aber was natürlich im Skript zur Verfügung steht, so kommt man auf das Gleichungssystem: $\underset{\sim}{Y}_k \cdot \underline{u}_k = \underline{i}_q$.

Dabei bezeichnen $\underset{\sim}{Y}_k$ die Knotenleitwertsmatrix, $\underline{u}_k$ Knotenspannungsvektor und $\underline{i}_q$ die Knoten-Stromquellenvektor. Die Hauptarbeit bei Knotenspannungsanalyse ist die Knotenleitwertsmatrix $\underset{\sim}{Y}_k$ und die Quellenvektor $\underline{i}_q$, die die Erregungen in der Schaltung beinhaltet, auszufüllen, was in den Klausuren immer wieder gefragt wird. Der einzige Nachteil dieses Verfahrens ist, dass es nur für Netzwerke, die ausschließlich aus spannungsgesteuerten Bauelementen bestehen, verwendet werden können. Das stellt aber keine wesentliche Einschränkung dar, da alle strongesteuerte Bauelemente mit gewissen Tricks, in spannungsgesteuerte umgewandelt werden können. Nun sollen diese Tricks eingeführt werden:

- Wie man leicht nachvollziehen kann, sind die Stromquellen spannungsgesteuert und die Spannungsquellen eben nicht. Anschaulicher kann man diese Eigenschaft aus den Kennlinie beider Quellen ablesen:

Stromquelle:

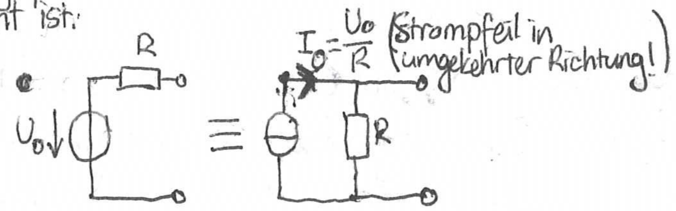


→ Kennlinie als Funktion von Spannung darstellbar. ⇒ spannungsgesteuert

Spannungsquelle:

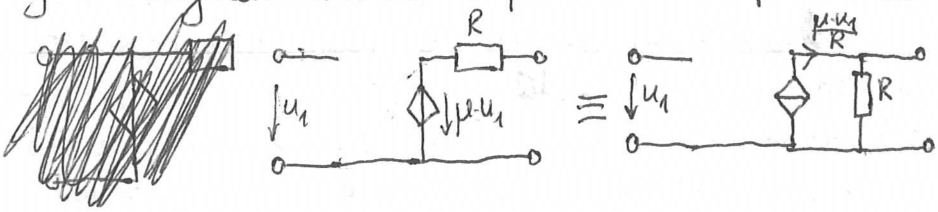
→ Kennlinie ist keine Funktion von Spannung. ⇒ nicht spannungsgesteuert.

Bitte lassen Sie sich also von den Namen nicht verwirren. Jetzt sollen wir also die Spannungsquelle in ein spannungsgesteuertes Bauelement umwandeln. Wenn man eine Spannungsquelle in Reihe mit einem Widerstand geschaltet hat, dann ist die Umwandlung ziemlich einfach. Wir haben bereits in der zweiten Tutorübungsstunde die sogenannte Quellenumwandlung kennengelernt, was besagt, dass eine Spannungsquelle mit einem Widerstand in Reihe, zu einer Stromquelle mit einem Parallelleitwert äquivalent ist:



Da die Stromquelle und der Leitwert spannungsgesteuert sind, kann man diese nun in $\underline{Y}_k$ bzw. $\underline{i}_q$ eintragen. Damit haben wir das Problem durch die Spannungsquelle beseitigt.

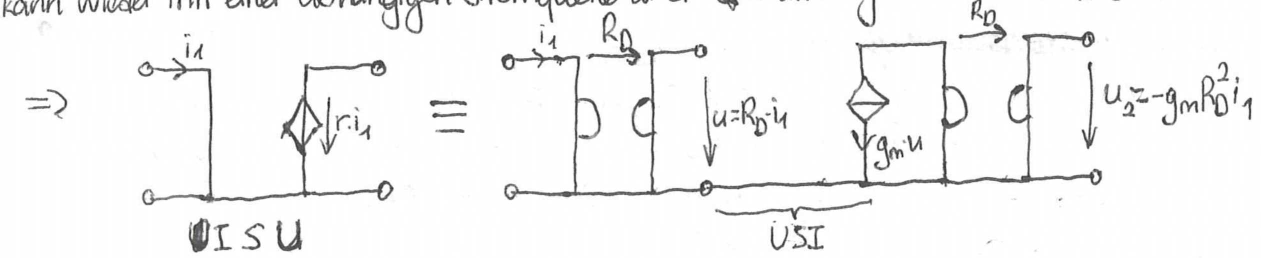
Das gleiche Vorgehen kann man außerdem auch für eine abhängige Spannungsquelle durchführen:



- Hat man eine Spannungsquelle aber mit keinem Widerstand in Serie, oder allgemeiner, hat man ein stromgesteuertes Bauelement in seiner Schaltung, dann lässt es sich ganz einfach in ein spannungsgesteuertes Bauelement umwandeln, indem man einen Dualwandler. Der Dualwandler ist uns ja aus Kapitel Zweitore bekannt, auch ganz häufig unter dem Namen Gyrator. Verschaltet man ein spannungsgesteuertes Bauelement mit einem Gyrator in Kettenschaltung, dann ist diese äquivalent zu dem ursprünglichen stromgesteuerten Bauelement. Praktisch hat man also nichts geändert, aber der Gewinn dabei ist, man hat den stromgesteuerten Bauteil mit zwei spannungsgesteuerten Bauteile realisiert, die für Knotenspannungsanalyse zugänglich sind.

→ Anmerkung: Gyrator ist aus zwei USIs realisierbar. Ein USI besteht aus einem Leerlauf und einer abhängigen Stromquelle, also aus zwei spannungsgst. Bauelemente. Deswegen ist USI in $\underline{Y}_k$ eintragbar und daher ist auch der Gyrator spannungsgst. und für Knotenspannungsanalyse zugänglich (siehe auch Aufgabe 1a).

Als Beispiel wandeln wir ein ISU um. Der Eingang von ISU ist Kurzschluss, entspricht also einer Nullspannungsquelle, und ist damit stromgesteuert. Den Kurzschluss können wir aber mit einem Leerlauf und Gyrator ersetzen, die für Knotenspannungsanalyse zugänglich sind. Der Ausgang ist eine abhängige Spannungsquelle, also stromgesteuert. Die kann wieder mit einer abhängigen Stromquelle und einem Gyrator ersetzt werden.



Damit haben wir ein ISU mit einem USI und zwei Gyratoren für die Knotenspannungsanalyse zugänglich gemacht. Diese Dualwandlung ist auch natürlich für eine unabhängige Spannungsquelle, USU und ISI anwendbar.

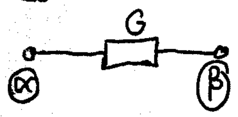
- Der ideale Übertrager ist mit der Parallelschaltung zweier Gyratoren zu ersetzen.
- Transistoren und Operationsverstärker sind mit geeigneten Ersatzschaltbilder zu ersetzen, je nachdem in welchem Arbeitsbereich betrieben werden.

Jedoch sind die Transistoren nicht so typisch für Knotenspannungsanalysefragen, wie ein idealer Übertrager. Op-Amps dagegen sind höchstrelevant für solche Fragen, sind aber praktisch immer im streng linearen Bereich betrieben. Also sind Operationsverstärker eigentlich in Knotenspannungsanalysefragen wegen der Angabe mit einem Nullor zu ersetzen.

Nachdem wir alle Tricks für die Umwandlung nicht spannungsgesteuerter Bauelemente kennengelernt haben, können wir uns auf den Einbau der spannungsgesteuerten Elemente in $\underset{\sim}{Y_k}$, bzw. in $\underline{i_q}$ konzentrieren. Man soll also zunächst alle Bauelemente so ersetzen, dass nur noch spannungsgesteuerte Elemente, nämlich Leitwerte, Stromquellen und USIs, eventuell auch Nulloren vorkommen. Dann sind $\underset{\sim}{Y_k}$ und $\underline{i_q}$ in zwei Schritten by inspection aufzufüllen.

In dem ersten Schritt berücksichtigt man die Nulloren zunächst nicht. Die Leitwerte und USIs sind in $\underset{\sim}{Y_k}$ und die unabhängigen Stromquellen in $\underline{i_q}$ einzutragen. Man soll dabei beachten, dass die abhängigen Stromquellen in USIs <u>nicht</u> in $\underline{i_q}$ eingetragen werden. Für den Einbau geht man folgendermaßen vor:

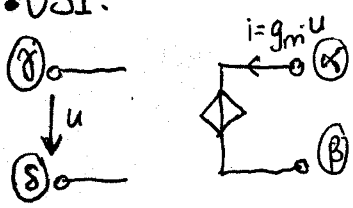
• Leitwert:



$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} G & -G \\ -G & G \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}$$

→ Liegt der Leitwert zwischen den Knoten α und β, so sind die Plätze von $\underset{\sim}{Y_k}$ so auszufüllen:
Spalte α, Zeile α : +G , Spalte α, Zeile β : −G
Spalte β, Zeile α : −G , Spalte β, Zeile β : +G

• USI:

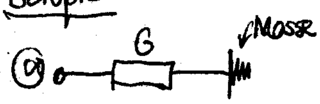


$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \gamma & \delta \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} +g_m & -g_m \\ -g_m & +g_m \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}$$

→ Liegt der Leerlauf zwischen den Knoten γ und δ, und die abh. Stromquelle mit dem Wert $g_m u$ zwischen α und β, so füllt man folgendermaßen aus:
Spalte γ, Zeile α : $+g_m$, Spalte γ, Zeile β: $-g_m$
Spalte δ, Zeile α: $-g_m$, Spalte δ, Zeile β: $+g_m$

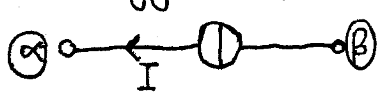
→ <u>Anmerkung</u>: Sind bei USI, δ und β gleiches Knoten, dann ist natürlich Spalte β zu berücksichtigen. Ist beispielsweise β den Massenknoten sowohl bei Leitwert, als auch bei USI, sogar auch bei einer Stromquelle, dann existiert die Spalte β, bzw. Knoten β nicht mehr, man soll also dafür nichts eintragen.

<u>Beispiel</u>: Leitwert:



$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \left[\begin{array}{c} +G \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \alpha \end{array}$$

• unabhängige Stromquelle:

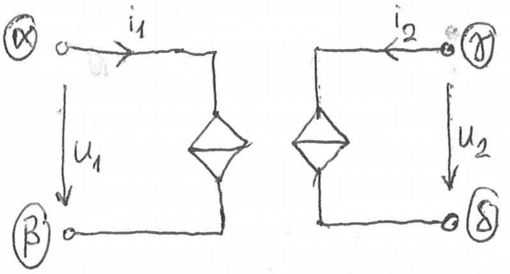


$$\underline{i_q} = \left[\begin{array}{c} +I \\ \vdots \\ -I \end{array}\right] \begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}$$

→ Liegt die Stromquelle zwischen den Knoten α und β, so sind die Plätze von $\underline{i_q}$ so auszufüllen:
Zeile α: +I , Zeile β: −I

→ <u>Anmerkung</u>: Für den Einbau von Leitwerte und USIs sind die Vorzeichen immer so bestimmt, indem der aus einem Knoten rauslaufende Strom positiv gezählt wird. Beim Einbau der Stromquelle ist es offensichtlich andersum. Der Grund dafür ist aber, dass wir uns an der anderen Seite der Gleichung $\underset{\sim}{Y_k} \cdot \underline{u_k} = \underline{i_q}$ befinden.

<u>A1</u> a) Nachdem wir uns schon Gedanken gemacht haben, wissen wir, dass der Gyrator für die Knotenspannungsanalyse zugänglich ist. Wir wissen auch schon, dass der Gyrator mit zwei USIs realisierbar ist, was man natürlich an dem gegebenen Ersatzschaltbild merkt. Der sieht folgendermaßen aus:



mit $i_1 = G u_2$, $i_2 = -G u_1$, wobei G das Übersetzungsverhältnis des Gyrators ist.

Wir wissen von unseren Vorüberlegungen, wie ein USI in $\underset{\sim}{Y_k}$ eingetragen werden kann. Also sollen wir die zwei USIs in dem obigen Ersatzschaltbild einzeln in $\underset{\sim}{Y_k}$ eintragen. Der erste USI besteht aus dem Leerlauf zwischen α und β als Eingang, worüber die Spannung u_1 abfällt und aus der abhängigen Stromquelle zwischen γ und δ mit dem Strom $i_2 = -G \cdot u_1$. Dieser wird in $\underset{\sim}{Y_k}$ folgendermaßen eingetragen:

→ In diesem Fall ist die Knotennummerierung genau andersum wie in unserer Vorüberlegung. Also ist unser γ = α und unser δ = β usw. Deswegen ergibt sich:

$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} -G & +G \\ +G & -G \end{array}\right] & \begin{array}{c} \gamma \\ \delta \end{array} \\ \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} & \end{array}$$

Vorsicht: Unser g_m aus der Vorüberlegung ist hier $g_m = -G$, da $i_2 = g_m u_1 = -G \cdot u_1$ gilt!!!

Der zweite USI hat als Eingang den Leerlauf zwischen γ und δ, worüber u_2 abfällt, als Ausgang die abhängige Stromquelle zwischen α und β mit dem Strom $i_1 = G \cdot u_2$. Diesmal ist die Knotennummerierung völlig äquivalent zu unserer Vorüberlegung. Ferner gilt diesmal $g_m = +G$, wegen $i_1 = G \cdot u_2 = g_m \cdot u_2$. Deswegen ist dieser USI einfacher, nämlich die Matrix entspricht genau der aus der Vorüberlegung:

$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} +G & -G \\ -G & +G \end{array}\right] & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \\ \begin{array}{cc} \gamma & \delta \end{array} & \end{array}$$

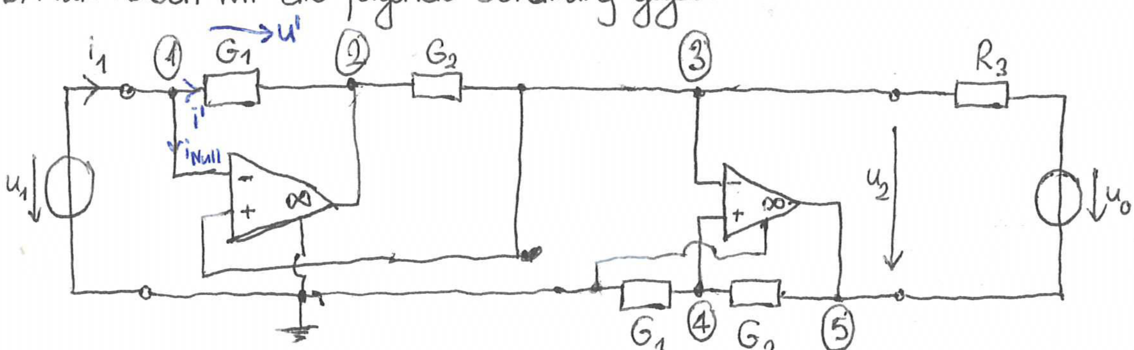
Superponiert man die beiden Ergebnisse, so erhält man die Vorschrift für den Einbau des Gyrators in $\underset{\sim}{Y_k}$:

$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} & & -G & +G \\ & & +G & -G \\ +G & -G & & \\ -G & +G & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \gamma \\ \delta \\ \alpha \\ \beta \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \gamma & \delta & \alpha & \beta \end{array} & \end{array}$$

oder äquivalent (Je nach der Relation zwischen γ, δ, α, β)

$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} & & +G & -G \\ & & -G & +G \\ -G & +G & & \\ +G & -G & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array} & \end{array}$$

b) Nun haben wir die folgende Schaltung gegeben:



Außerdem ist es gegeben, dass $R_3 = \frac{1}{G_3}$ und $u_0 G_3 = i_2$ gelten. Es steht auch in der Angabe, dass die beiden Op-Amps im streng linearen Bereich betrieben werden.

Da die Op-Amps im streng linearen Bereich sind, können ihre Eingänge mit Nullatoren modelliert werden. Aufgrund der Eigenschaft des Nullators, dass die Spannungsabfall auf ihn Null beträgt, kann man an dieser Stelle merken, dass die Knoten ①, ③ und ④, die jeweils über Op-Amp-Eingänge miteinander verbunden sind, auf derselben Potential liegen. Deswegen sind ihre Knotenspannungen u_{k_1}, u_{k_3} und u_{k_4} gleich zueinander. Kommt man richtig auf die Aufgabe, so soll man u_2 und i_1 in Abhängigkeit von Knotenspannungen und Leitwerte angeben. u_2 fällt zwischen den Knoten ③ und ⑤ ab, deswegen gilt es:

$\boxed{u_2 = u_{k_3} - u_{k_5}}$ (u_{k_3} ist zwischen Knoten ③ und Masse, u_{k_5} ist zwischen ⑤ und Masse. Stellt man KVL auf Masche zwischen ③, Masse, ⑤ ③ so sieht man diese Gleichung.)

Da $u_{k_3} = u_{k_4} = u_{k_1}$ gilt, sind folgende Antworten auch richtig:

$\underline{u_2 = u_{k_1} - u_{k_5}}$, $\underline{u_2 = u_{k_4} - u_{k_5}}$

Stellt man beim Knoten ① die KCL-Gleichung aus, sieht man:

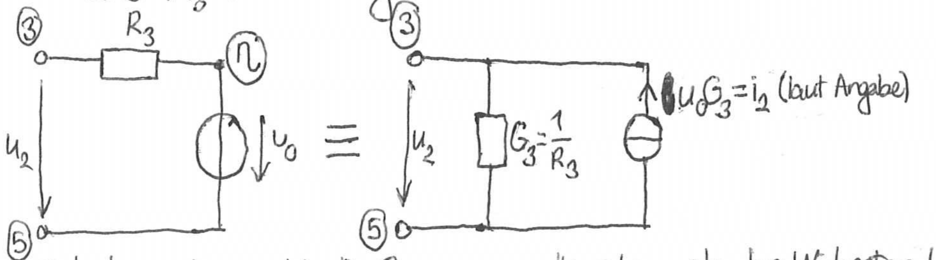
$i_1 - i' - \underbrace{i_{Null}}_{=0} = 0 \Rightarrow i_1 = i'$

→ Ohmsches Gesetz: $i_1 = u' \cdot G_1$, wobei für u' gilt: $u' = u_{k_1} - u_{k_2}$

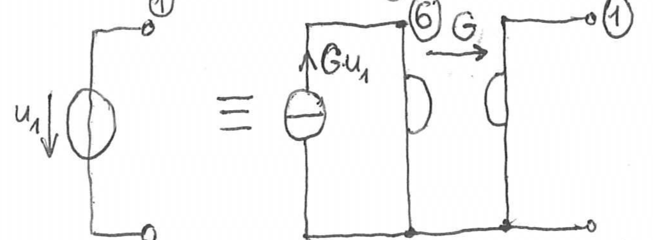
$\Rightarrow \boxed{i_1 = G_1(u_{k_1} - u_{k_2})}$

Aus gleichem Grund sind die Antworten $i_1 = G_1(u_{k_3} - u_{k_2})$, bzw. $i_1 = G_1(u_{k_4} - u_{k_2})$ auch richtig.

c) Nun sollen wir mithilfe der Tricks aus unseren Vorüberlegungen die Schaltung auf eine Knotenspannungsanalyse vorbereiten. Zunächst sollen wir dabei die Operationsverstärker mit den entsprechenden ESBs ersetzen. Da die beiden Op-Amps im linearen Bereich sind, ist dieses entsprechende ESB das Nullor-Ersatzschaltbild für beide Operationsverstärker. Also sind die Eingänge der Op-Amps mit Nullatoren und die Ausgänge mit Noratoren zu ersetzen. Zum Zweiten sollen wir sämtliche stromgesteuerte Elemente in Stromgesteuerte umwandeln. Die Schaltung besteht aus 2 Op-Amps im linearen Bereich, 4 Leitwerte, 2 Spannungsquellen und einem Widerstand. Obwohl der Widerstand stromgesteuert ist, stört er uns nicht, da wir ihn immer als $G_3 = \frac{1}{R_3}$ als ein Leitwert behandeln können. Was uns stört, sind die Spannungsquellen. Die Quelle mit dem Wert u_0 ist einfach durch eine Quellenwandlung umzuwandeln, da sie mit dem Widerstand R_3 in Reihe geschaltet ist:

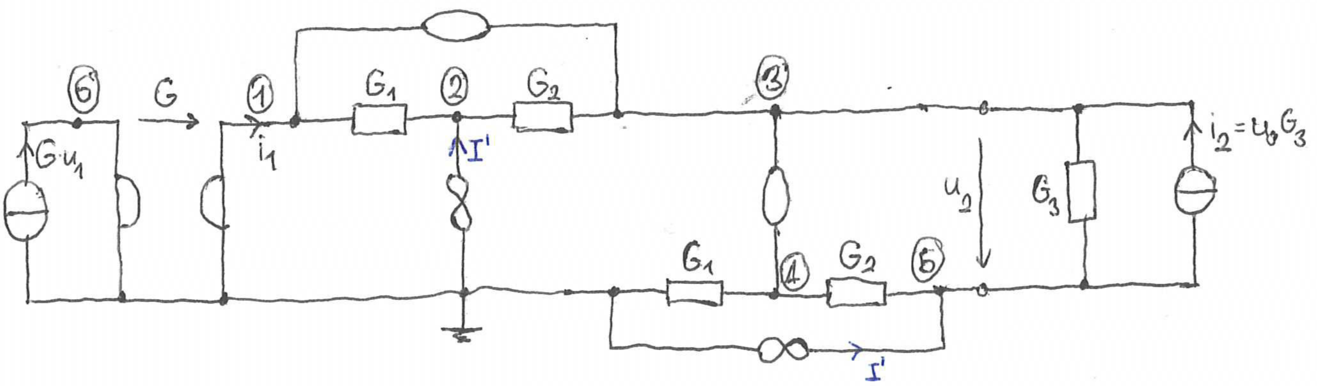


Damit haben wir sowohl die Spannungsquelle, als auch den Widerstand beseitigt, sogar haben wir ein Knoten ⓝ gespart. Nur ist auf die Richtung des Stroms der Stromquelle zu beachten, die umgekehrt ist.
Die Spannungsquelle mit dem Wert u_1 hat leider keinen Widerstand in Reihe, wir sollen sie mit einem Gyrator dualwandeln. Das Übersetzungsverhältnis ist dabei willkürlich, wählen wir als G.



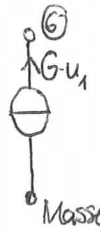
Da durch diese Dualwandlung ein zusätzliches Knoten auftritt, nennen wir ihn, wie die Angabe andeutet mit der nächstgrößeren, noch nicht benutzten Ziffer, nämlich ⑥.

Damit sieht das Ersatzschaltbild der gesamten Schaltung, die für die Knotenspannungsanalyse zugänglich ist, folgendermaßen aus:



d) Jetzt sollen wir das Gleichungssystem $\underset{\sim}{Y_k} \cdot \underset{\sim}{u_k} = \underset{\sim}{i_q}$ für die obige Schaltung, ohne die Nullatoren und Noratoren zu berücksichtigen, aufstellen. D.h. wir sollen $\underset{\sim}{Y_k}$ und $\underset{\sim}{i_q}$ bestimmen. Betrachten wir alle Elemente von links nach rechts, wobei wir immer wieder unsere Vorüberlegungen aufgreifen:

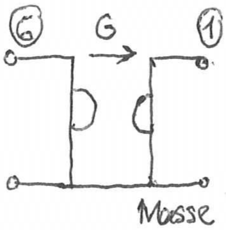
1)



$\Rightarrow i_{q6} = G \cdot u_1$ (sechste Zeile von $\underset{\sim}{i_q} = G \cdot u_1$)

(zweiter Eintrag fällt weg, da Ⓑ = Masse)

2)

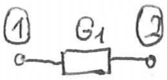


$\Rightarrow$ ⑥ = Ⓐ, ① = Ⓒ (siehe Teilaufgabe a), Ⓑ und Ⓓ sind Masse und fallen damit die entsprechenden 6 Einträge weg)

$\Rightarrow Y_{k16} = -G$

$Y_{k61} = +G$ ← Zeile 6 Spalte 1

3)



$\Rightarrow Y_{k11} = +G_1,\ Y_{k12} = -G_1$

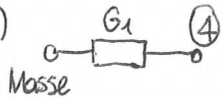
$Y_{k21} = -G_1,\ Y_{k22} = +G_1$

4)

$\Rightarrow Y_{k22} = +G_2,\ Y_{k23} = -G_2$

$Y_{k32} = -G_2,\ Y_{k33} = +G_2$

5)



$\Rightarrow Y_{k44} = +G_1$

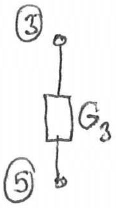
(andere 3 Einträge fallen weg, da Masse)

6)

$\Rightarrow Y_{k44} = +G_2,\ Y_{k45} = -G_2$

$Y_{k54} = -G_2,\ Y_{k55} = +G_2$

7)



$\Rightarrow Y_{k33} = +G_3,\ Y_{k35} = -G_3$

$Y_{k53} = -G_3,\ Y_{k55} = +G_3$

8)

$\Rightarrow i_{q3} = +i_2$

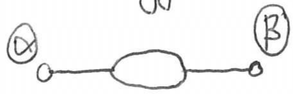
$i_{q5} = -i_2$

→ Superponiert man alle dieser Ergebnisse so kommt auf das Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{c}
① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
G_1 & -G_1 & & & & -G \\
-G_1 & G_1+G_2 & -G_2 & & & \\
 & -G_2 & G_2+G_3 & & -G_3 & \\
 & & & G_1+G_2 & -G_2 & \\
 & & -G_3 & -G_2 & G_2+G_3 & \\
+G & & & & &
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} u_{k_1} \\ u_{k_2} \\ u_{k_3} \\ u_{k_4} \\ u_{k_5} \\ u_{k_6} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ I' \\ i_2 \\ 0 \\ I' - i_2 \\ G \cdot u_1 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ (=0) \\ \\ \\ (=(-i_2)) \\ \\ \end{array}
$$

→ Anmerkung: Die Ströme I' sind um die Ströme aus Noratoren anzudeuten. Diese müssen aber nicht hingeschrieben, sind also optional. Sie helfen aber bei den Einbau von Nulloren, da sie andeuten welche Zeile von $\underset{\sim}{i_q}$ gestrichen werden soll.

e) Um die Nulloreinbau einfacher durchführen zu können, machen wir wieder eine Vorüberlegung über wie dieser Schritt allgemein funktioniert. Das ist genau der zweite Schritt der Knotenspannungsanalyse. Befindet sich ein Nullator zwischen den Knoten α und β, so addiert man die Spalten aufeinander. und schreibt diese neuentstande Spalte $\alpha+\beta$ in den Platz von der ursprünglichen Spalte α und streicht β weg. Oder kann man andersum $\alpha+\beta$ in β hinschreiben und α wegstreichen. ~~Spalte mit einer Knotenspannung~~ Da die Spalte β mit der Knotenspannung $\underline{u}_{k\beta}$ in dem Gleichungssystem $\underline{Y}_k \cdot \underline{u}_k = \underline{i}_q$ multipliziert wird, hat $u_{k\beta}$ nach Wegstreichen von β keine Bedeutung mehr und muss auch weggestrichen werden.



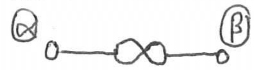
$\Rightarrow$ Spalte $\alpha+\beta$ in Spalte α eintragen
Spalte β und $u_{k\beta}$ wegstreichen.

Bsp:

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha & \beta \\ \alpha & G_1 & G_2 \\ \beta & 0 & G_3 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_{k\alpha} \\ \underline{u}_{k\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{i}_{q\alpha} \\ \underline{i}_{q\beta} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} & \alpha & \beta \\ \alpha & G_1+G_2 & \\ \beta & G_3 & \end{array} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_{k\alpha} \\ \cancel{\underline{u}_{k\beta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{i}_{q\alpha} \\ \underline{i}_{q\beta} \end{bmatrix}$$

Liegt zwischen den Knoten α und β ein Norator, so addiert man die Zeilen aufeinander und schreibt $\alpha+\beta$ in den Platz der ursprünglichen Zeile α und streicht Zeile β weg. Man kann auch hier andersum $\alpha+\beta$ in die Zeile β hinschreiben und Zeile α wegstreichen. Streicht man Zeile β weg, so soll man auch $i_{q\beta}$, also Zeile β von i_q wegstreichen, da diese die rechte Seite einer Gleichung, die weggestrichen wurde, ist. Schreibt man beim ersten Schritt die Noratorströme I' auch hin, so merkt man, dass durch Einbau von Noratoren genau die Zeilen, die diese Ströme beinhalten, weggestrichen werden.



$\Rightarrow$ Zeile $\alpha+\beta$ in Zeile α eintragen
Zeile β und $i_{q\beta}$ wegstreichen.

Bsp:

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha & \beta \\ \alpha & G_1 & -G_2 \\ \beta & G_3 & 0 \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_{k\alpha} \\ u_{k\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{q\alpha} \\ i_{q\beta} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} \alpha & G_1+G_3 & -G_2 \\ \cancel{\beta} & & \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_{k\alpha} \\ u_{k\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{q\alpha} \\ \cancel{i_{q\beta}} \end{bmatrix}$$

→ Anmerkung: Ist α oder β Massenknoten, was besonders bei Noratoren häufig der Fall ist, so ist die Spalte α und Zeile α, bzw. Spalte β und Zeile β gar nicht vorhanden.
Was man in diesem Fall macht ist dann einfach für Nullatoren auch Spalte β, bzw. Spalte α direkt mit $u_{k\beta}$, bzw. $u_{k\alpha}$ wegzustreichen. Für Noratoren streicht man analog auch Zeile β, bzw. Zeile α direkt mit $i_{q\beta}$, bzw. $i_{q\alpha}$ weg.

Kommt man richtig zur Teilaufgabe e), so hat man 2 Nullatoren und 2 Noratoren einzubauen. Wir betrachten zunächst alle einzelne Fälle getrennt:

1)

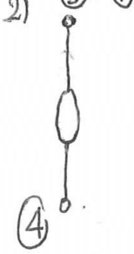
- Spalte ①+③ in Spalte ① schreiben:

$Y_{k_{11}} = G_1$, $Y_{k_{21}} = -G_1 - G_2$, $Y_{k_{31}} = G_2 + G_3$

$Y_{k_{41}} = 0$, $Y_{k_{51}} = -G_3$, $Y_{k_{61}} = G$

- Spalte ③ wegstreichen
- u_{k_3} wegstreichen.

2) ③ = ①



→ Anmerkung: Da wir jetzt alle Informationen von ③ in ① geschrieben haben, sollen wir ③ als ① behandeln. ① wird ③ geworden!

- Spalte ①+④ in Spalte ① schreiben.

$Y_{k_{11}} = G_1$, $Y_{k_{21}} = -G_1 - G_2$, $Y_{k_{31}} = G_2 + G_3$

$Y_{k_{41}} = G_1 + G_2$, $Y_{k_{51}} = -G_2 - G_3$, $Y_{k_{61}} = G$

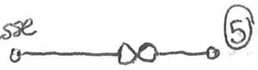
- Spalte ④ wegstreichen.
- u_{k_4} wegstreichen.

3) 

Masse

Da ③ = Masse:

- Zeile ② wegstreichen.
- i_{q_2} wegstreichen.

4) Masse 

Da ⑥ ist Masse:

- Zeile ⑤ wegstreichen.
- i_{q_5} wegstreichen.

Superponiert man diese Ergebnisse, so kommt man auf das resultierende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ③ \\ ④ \\ ⑥ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ① & ② & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & -G \\ +G_2+G_3 & -G_2 & -G_3 & 0 \\ G_1+G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_{k_1} \\ u_{k_2} \\ u_{k_5} \\ u_{k_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_2 \\ 0 \\ G\cdot u_1 \end{bmatrix}$$

f) Nun sollen wir dieses Gleichungssystem und unsere Antwort aus Teilaufgabe a) ausnutzen, um u_2 und i_1 in Abhängigkeit von G_1, G_2, u_1 und i_2 anzugeben. Dabei nehmen wir an, $G_3=0$. Um diese Annahme besser veranschaulichen zu können schreiben wir das obige Gleichungssystem nochmal, unter Berücksichtigung dieser Annahme hin. Außerdem schreiben wir unser Ergebnis aus a) nochmal hin:

$$\begin{array}{c} \\ ① \\ ③ \\ ④ \\ ⑥ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ① & ② & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & -G \\ G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ G_1+G_2 & 0 & -G_2 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} u_{k_1} \\ u_{k_2} \\ u_{k_5} \\ u_{k_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_2 \\ 0 \\ G\cdot u_1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = u_{k_3} - u_{k_5} \Longleftrightarrow \underline{u_2 = u_{k_1} - u_{k_5}}$$
$$\underline{i_1 = G_1(u_{k_1} - u_{k_2})}$$

Jetzt sollen wir also u_{k_1}, u_{k_2} und u_{k_5} mithilfe des obigen Gleichungssystems in Abhängigkeit von u_1, i_2, G_1, G_2 bestimmen. Dabei ist es sinnvoll mit der Zeile, wo am meisten 0 stehen, anzufangen, was in diesem Fall Zeile ⑥ ist. Stellt man die Gleichung für Zeile ⑥ auf:

$$\Rightarrow G\cdot u_{k_1} + 0\cdot u_{k_2} + 0\cdot u_{k_5} + 0\cdot u_{k_6} = G\cdot u_1 \Longleftrightarrow G\cdot u_{k_1} = G u_1 \Rightarrow \underline{u_{k_1} = u_1}$$

Wir sollen auch u_{k_5} bestimmen, was immer mit Spalte ⑤ multipliziert wird. Da in Spalte ⑤ nur in Zeile ④ kein Null steht, kann man u_{k_5} nur über Gleichung ④ bestimmen:

$$\Rightarrow (G_1+G_2)\underbrace{u_{k_1}}_{=u_1} - G_2 u_{k_5} = 0 \Longleftrightarrow (G_1+G_2)u_1 = G_2 u_{k_5} \Rightarrow u_{k_5} = \frac{G_1+G_2}{G_2}u_1 \Longleftrightarrow \underline{u_{k_5} = \left(1+\frac{G_1}{G_2}\right)u_1}$$

Nachdem wir u_{k_1} und u_{k_5} bestimmt haben, können wir u_2 schon angeben:

$$u_2 = u_{k_1} - u_{k_5} = u_1 - \left(1+\frac{G_1}{G_2}\right)u_1 = u_1\left(\cancel{1}\cancel{-1}-\frac{G_1}{G_2}\right) \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{-G_1}{G_2}\cdot u_1}$$

Jetzt bleibt nur noch u_{k_2} zu bestimmen. Dafür ist wieder die Zeile, die gleichzeitig u_{k_2} ins Spiel bringt und möglichst viel 0 hat vorzuziehen. Das ist offenkundig die Zeile ②:

$$\Rightarrow G_2\underbrace{u_{k_1}}_{=u_1} - G_2 u_{k_2} = i_2 \Longleftrightarrow G_2 u_1 - i_2 = G_2 u_{k_2} \Longleftrightarrow \underline{u_{k_2} = u_1 - \frac{i_2}{G_2}}$$

Damit kann jetzt auch i_1 angegeben werden:

$$i_1 = G_1(\underbrace{u_{k_1}}_{=u_1} - u_{k_2}) = G_1(\cancel{u_1} - \cancel{u_1} + \frac{i_2}{G_2}) \iff \boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_2} i_2}$$

g) In dieser letzten Teilaufgabe sollen wir, die vorliegende Schaltung, in diesem Fall das Zweitor, durch ein Vergleich mit den Zweitormatrizen bekannter Zweitore identifizieren. Für einen besseren Vergleich ist es zweckmäßig, die inverse Hybridmatrix, deren Gleichungen wir bestimmt haben, aufzustellen:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{G_1}{G_2} \\ \frac{-G_1}{G_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Schaut man in die Formelsammlung, so sieht man, dass für Nullor und Gyrator keine inverse Hybridmatrix existiert. Unter Frage kommen nur NIK und idealer Übertrager. Bei NIK steht aber, dass $\underset{\sim}{H}'$:

$\underset{\sim}{H}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{k} \\ \frac{-1}{k} & 0 \end{bmatrix}$. Dieser passt nicht, da h_{12} und h_{21} gleiche Vorzeichen haben, was aber in unserer Matrix nicht der Fall ist.

Der ideale Übertrager dagegen hat die inverse Hybridmatrix:

$\underset{\sim}{H}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{ü} \\ \frac{1}{ü} & 0 \end{bmatrix}$, die genau unserer Matrix mit $ü = \frac{-G_2}{G_1}$ entspricht.

Dieses Zweitor ist also ein idealer Übertrager mit $ü = \frac{-G_2}{G_1}$.