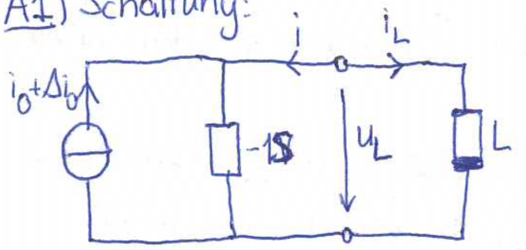
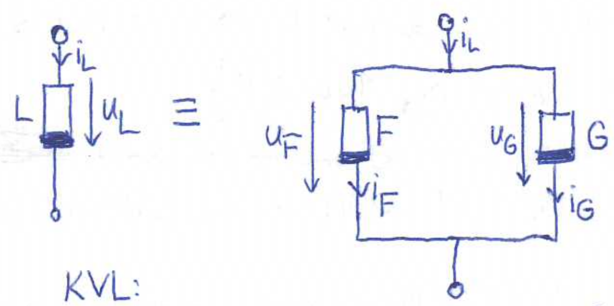
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 3

A1) Schaltung:



Last:



KVL:

$\Rightarrow u_L = u_F = u_G$ (F und G sind in Reihe geschaltet)

KCL: $i_L = i_F + i_G$

a) $i_F = \begin{cases} -1S\cdot u_F - 2A &, u_F \leq -1V \\ \left(\frac{u_F}{1V}\right)^3 \cdot 1A &, -1V < u_F < 1V \\ 1A &, 1V \leq u_F \end{cases}$ $\Rightarrow$ Abschnittsweise definierte explizite Beschreibung von F (Leitwertsbeschreibung-Spannungsgesteuert).

→ Alle Funktionen für ihre Definitionsbereiche zeichnen. Achsen immer beschriften! Achsenskalierung auch immer hinschreiben, d.h. zeigen Sie, was Ihr Maßstab ist. Einheiten auch immer mitschreiben um Punktabzüge zu vermeiden.

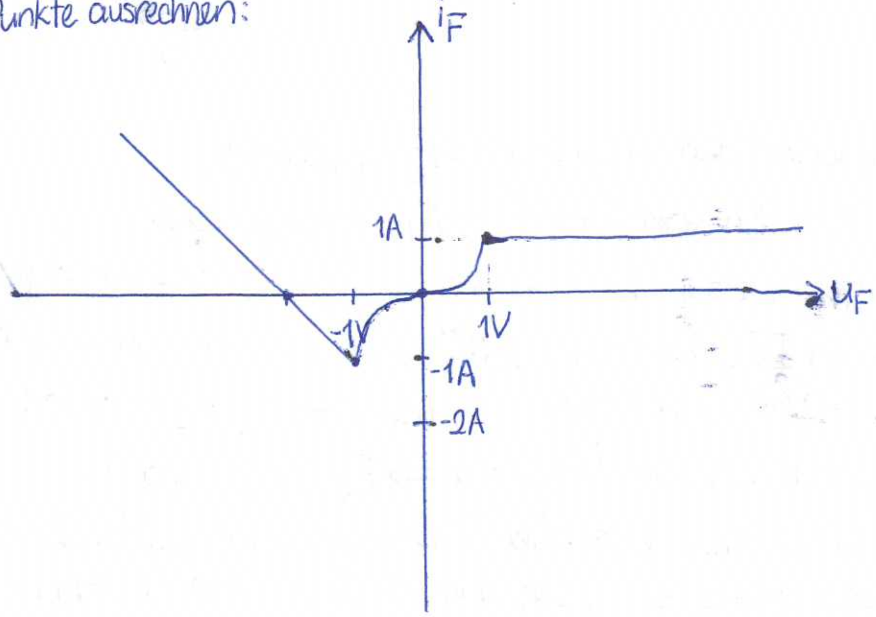
→ <u>Anmerkung:</u> Leitwert ist die Steigung in der u-i-Ebene. D.h, wenn Sie ein Eintor mit $i = G\cdot u$ haben, dann ist die Kennlinie eine Ursprungsgerade mit der Steigung G. Also, wenn die Gleichung $u = 2\Omega\cdot i$ heißt, dann ist die Steigung 0,5.

→ <u>Skizze:</u> Einige Punkte ausrechnen:

$i_F(0V) = 0A$

$i_F(-1V) = -1A$

$i_F(\lim\limits_{\underbrace{u_F \nearrow 1V}_{\text{linksseitiger Limes}}} u_F) = -1A$



Eigenschaften:

- Kennlinie beinhaltet den Ursprung ⇒ F quellenfrei.
- Kennlinie ist Funktion von Spannung ⇒ F spannungsgesteuert
- Kennlinie ist nicht injektiv (eindeutig) bezüglich des Stroms ⇒ F ist <u>nicht</u> stromgesteuert
- Kennlinie hat Punkte im II. Quadranten ⇒ F ist aktiv und damit <u>nicht</u> passiv. ($p = u\cdot i < 0$)
- Kennlinie ist nicht linear zwischen -1V und 1V ⇒ F ist <u>nicht</u> linear.
- Kennlinie ist nicht symmetrisch zum Ursprung. ⇒ F ist <u>nicht</u> ungepolt.

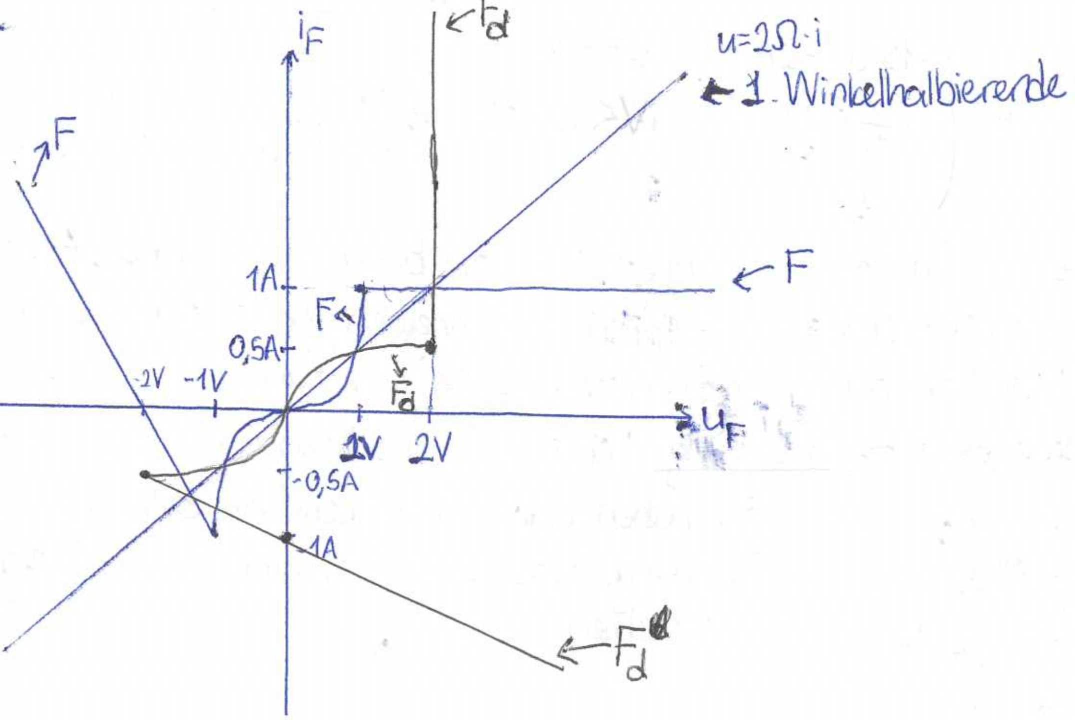
b) Dualität: $(u,i)\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \left(R_d i, \frac{u}{R_d}\right)\in\mathcal{F}^d$

→ Anmerkung: Kennlinie des dualen Eintors ist nur dann die Gespiegelte an dem ersten Winkelhalbierenden, wenn $R_d = 1\Omega$ gilt.

Sonst soll man u-i-Diagramm so skalieren, dass die Gerade $u = R_d \cdot i$ dem ersten Winkelhalbierenden entspricht. Dann ist die Kennlinie von $\mathcal{F}_d$ die Gespiegelte an dieser Gerade.

→ In unserem Fall ist $R_d = 2\Omega$. Wir sollen u-i-Diagramm so skalieren, dass $u = 2\Omega\cdot i$, bzw. $i = 0{,}5S\cdot u$ der Winkelhalbierende wird. Beispielsweise: Maßeinheit von $u = 2V$, Maßeinheit von $i = 1A$.

→ Skizze:



- Kennlinie beinhaltet wiederum den Ursprung ⇒ $\mathcal{F}_d$ quellenfrei.
- Kennlinie ist diesmal Funktion von Strom ⇒ $\mathcal{F}_d$ stromgesteuert.
- Kennlinie ist nicht injektiv bzgl. der Spannung ⇒ $\mathcal{F}_d$ nicht spannungsgesteuert.
- Kennlinie hat Punkte im IV. Quadranten ⇒ $\mathcal{F}_d$ ist aktiv und damit nicht passiv.
- Kennlinie ist zwischen −0,5A und 0,5A nicht linear ⇒ $\mathcal{F}_d$ nicht linear.
- Kennlinie ist nicht symmetrisch zum Ursprung ⇒ $\mathcal{F}_d$ nicht ungepolt.

→ Anmerkung: Mit Hilfe der Kenntnis, dass zwei Schaltungen dual zueinander sind, kann man viel Arbeit bei der Schaltungsanalyse sparen. Nämlich, wenn man die Eigenschaften von $\mathcal{F}$ kennt, besagt diese Information auch vieles über $\mathcal{F}_d$:

- $\mathcal{F}$ u-gesteuert ⇒ $\mathcal{F}_d$ i-gesteuert
- $\mathcal{F}$ i-gesteuert ⇒ $\mathcal{F}_d$ u-gesteuert
- $\mathcal{F}$ ungepolt ⇒ $\mathcal{F}_d$ ungepolt.
- $\mathcal{F}$ verlustfrei oder verlustbehaftet ⇒ $\mathcal{F}_d$ auch.
- $\mathcal{F}$ passiv oder aktiv ⇒ $\mathcal{F}_d$ auch.
- $\mathcal{F}$ quellenfrei ⇒ $\mathcal{F}_d$ quellenfrei

(siehe auch Skript)

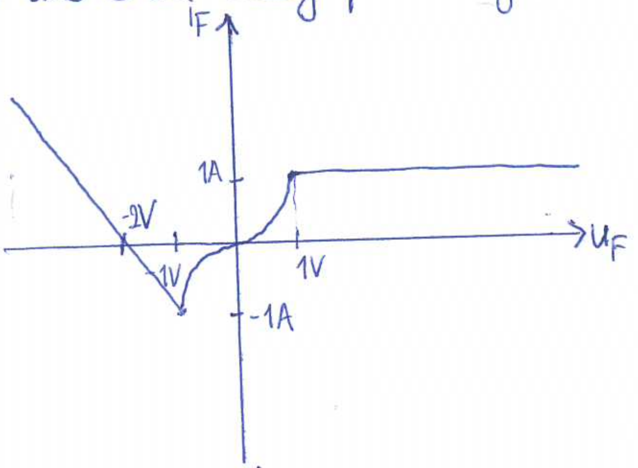
→ Man könnte diese Aufgabe auch mit Hilfe dieser Eigenschaften der Dualität lösen.

c) → <u>Anmerkung (Addition zweier Graphen)</u>: Sind zwei Bauelemente parallel geschaltet, dann addiert man ihre Kennlinien ganz normal in der u-i-Ebene. Man nimmt die Stromwerte beider Kennlinien für den gleichen Spannungswert und addiert diese. Also: $(u, i_1) \in F$ und $(u, i_2) \in G \Rightarrow (u, i_1 + i_2) \in L$ (wobei, L aus parallele Schaltung von F und G besteht.)

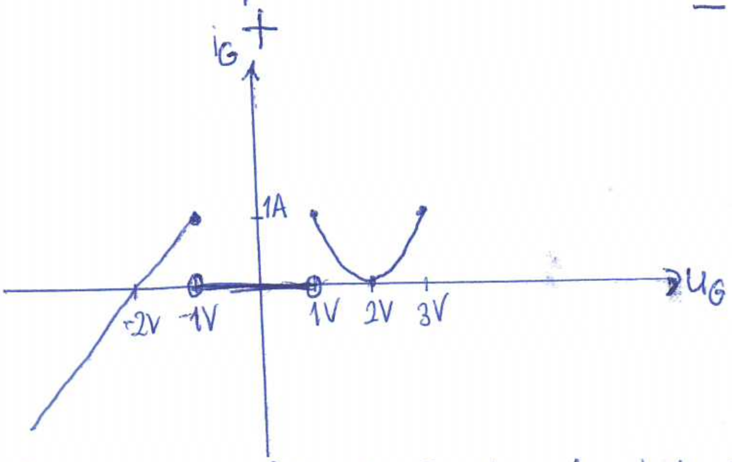
Sind zwei Bauelemente in Reihe geschaltet, dann addiert man ihre Kennlinie in der <u>i-u-Ebene</u>. D.h. man nimmt die Spannungswerte beider Kennlinie für den gleichen Stromwert und addiert diese. Also:
$(u_1, i) \in F$ und $(u_2, i) \in G \Rightarrow (u_1 + u_2, i) \in L$ (wobei, L aus Serienschaltung von F und G besteht.)

⇒ Wenn zwei Eintore parallel geschaltet sind, die Kennlinien untereinander zeichnen und addieren.
⇒ Wenn zwei Eintore serien geschaltet sind, Kennlinien nebeneinander zeichnen und addieren.
⇒ Diese Anmerkung ist auf Verschaltung mehrerer Bauelemente anwendbar. (Siehe konvexer Widerstand-ESB).

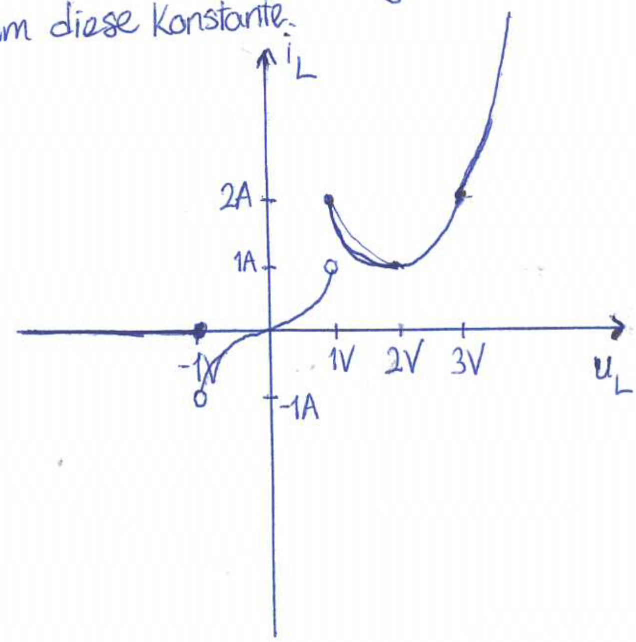
→ L ist F und G parallel geschaltet. ⇒ Vorgehen wie das erste:



→ Man merkt leicht, dass $i_F + i_G$ für $u_F, u_G \leq -1V$ immer 0A ergibt.
→ Addition mit einer konstanten Funktion verursacht eine Verschiebung nach oben um diese Konstante.

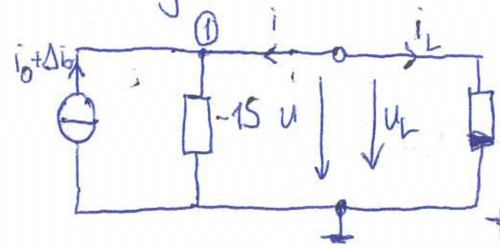


=



→ Nach Aufgabenteil c) erfolgt die Angabe der algebraischen Beschreibung der Last L. Man kann dann leicht verifizieren, dass die obige Kennlinie von L richtig gezeichnet ist.

d) Schaltung noch einmal:

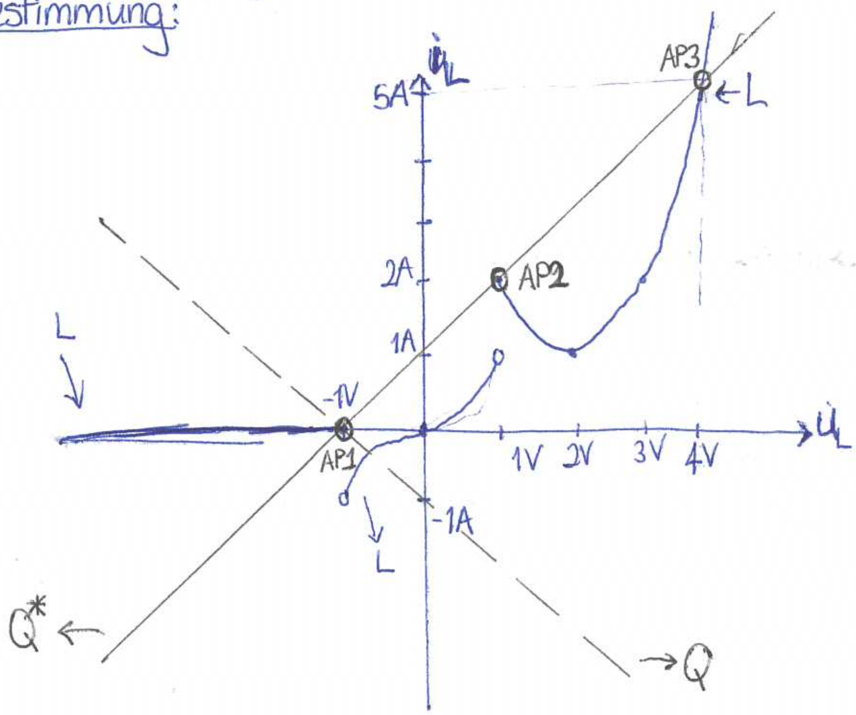


Quellenteil besteht aus einer Stromquelle mit Innenleitwert $G=-1S$.

Es gilt: $u=u_L$, $i=-i_L \Leftrightarrow i_L=-i$

Die Arbeitspunkte sind Betriebspunkte derart, die für sowohl Quelle als auch Last gültig sind, d.h. die Schnittpunkte derer Kennlinien. Damit man aber diese Schnittpunkte zeichnerisch bestimmen kann, muss man beide Kennlinien in der selben Ebene skizzieren können. Jedoch ist die Quelle in u-i, und die Last in u_L-i_L-Ebene. An dieser Stelle kommt externe Kennlinie von Q, also Q^* ins Spiel. Das ist auch in u_L-i_L-Ebene. Q^* ist die gespiegelte Form von Q an u-Achse, da $i_L=-i$ gilt.

→ Zeichnerische Bestimmung:



Nebenrechnung für Bestimmung von Q, bzw. Q^*:

KCL, beim Knoten ①: $i+i_0+\underbrace{\Delta i_0}_{=0}=\underbrace{-1S\cdot u}_{\text{Ohmsches Gesetz}} \Rightarrow i=-1S\cdot u-\underbrace{i_0}_{=1A\text{(laut Angabe)}} \Rightarrow i=-1S\cdot u-1A$ (Kennlinie von Q)

Es gilt $i=-i_L$ und $u=u_L$:

$\Rightarrow -i_L=-1S\cdot u_L-1A \Rightarrow \boxed{i_L=1S\cdot u_L+1A \text{ (Kennlinie von } Q^*)}$

⇒ Arbeitspunkte der Schaltung:

AP1(-1V, 0A) , AP2(1V, 2A) , AP3(4V, 5A)

→ Anmerkung: Achten Sie darauf, die externe Kennlinie genug lang zu zeichnen, da sonst man möglicherweise weitliegende Arbeitspunkte wie AP3 in diesem Fall übersehen kann.

e) Rechnerische Bestimmung heißt, die Kennlinien (algebraische Beschreibungen) gleichsetzen. Das ist die Methode um Schnittpunkte zweier Funktionen mathematisch zu bestimmen, wie man höchstwahrscheinlich aus der Schule kennt. Jedoch soll man wieder darauf achten, dass dafür beide Gleichungen in demselben Koordinatensystem definiert sein sollen. D.h., wir sollen nicht Q, sondern Q^* mit L gleichsetzen.

→ Wir haben $i_L = g(u_L)$ gegeben für die Last und Q^* haben wir in der vorherigen Teilaufgabe berechnet:

$$i_L = \begin{cases} 0A & , u_L \leq -1V \quad (I) \\ \left(\frac{u_L}{1V}\right)^3 \cdot 1A & , -1V < u_L < 1V \quad (II) \\ \left(\frac{u_L - 2V}{1V}\right)^2 \cdot 1A + 1A & , 1V \leq u_L \quad (III) \end{cases} , \qquad Q^*: \; i_L = 1S \cdot u_L + 1A$$

→ Man soll an dieser Stelle für alle Bereiche die Schnittpunkte bestimmen und danach überprüfen, ob diese die Voraussetzungen dieses Bereichs erfüllen.

$\underline{(I)}$: $u_L \leq -1V$

$$\cdot\ 0A = 1S \cdot u_L + 1A \Longleftrightarrow 1S \cdot u_L = -1A \Longrightarrow u_L = \frac{-1A}{1S} = -1V \Rightarrow \text{Schnittpunkt 1: } S1(-1V, 0A)$$

Es gilt: $u_L = -1V \leq -1V$ ✓. ⇒ Schnittpunkt 1 ist ein Arbeitspunkt ⇒ AP1 $(-1V, 0A)$

$\underline{(II)}$: $-1V < u_L < 1V$

$$\left(\frac{u_L}{1V}\right)^3 \cdot 1A = 1S \cdot u_L + 1A \Rightarrow \frac{u_L^3}{1V^2} \cdot \frac{1A}{1V} - \underbrace{\frac{1A}{1V}}_{1S = \frac{1A}{1V}} \cdot u_L = 1A \Longrightarrow \frac{1A}{1V}\left(\frac{u_L^3}{1V^2} - u_L\right) = 1A \quad \Big| \cdot \frac{1V}{1A}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_L^3}{1V^2} - u_L\right) = 1V \Rightarrow \frac{u_L^3}{1V^2} - u_L - 1V = 0$$ (Es ist hier schwierig für diese Funktion eine Nullstelle zu finden.)

→ Man ist aber leicht überzeugt, dass diese Funktion nur eine Nullstelle hat. D.h es gibt nur ein Schnittpunkt beider Kennlinien und es ist mit Hilfe der Zeichnung offensichtlich, dass ~~es größer als~~ dessen Spannungswert größer als 1V ist. Deswegen gibt es in diesem Bereich kein Arbeitspunkt.

→ Mit Hilfe eines Rechners sieht man, dass der Einzige Schnittpunkt, als Spannungswert $u \cong 1{,}32472V$ hat. Man sieht dann, dass er die Voraussetzungen dieses Bereichs nicht erfüllt.

(III): $1V \leq u_L$

$$\left(\frac{u_L - 2V}{1V}\right)^2 \cdot 1A + 1A = 1S \cdot u_L + 1A \Rightarrow \left(\frac{u_L - 2V}{1V}\right)^2 \cdot 1A = 1S \cdot u_L \Rightarrow \frac{u_L^2}{1V^2} \cdot 1A - \frac{4u_L}{1V} \cdot 1A + 4A = 1\frac{A}{V} u_L \quad \Big| \cdot \frac{1V}{1A}$$

$$\Rightarrow \frac{u_L^2}{1V} - 4u_L + 4V = u_L \Rightarrow \frac{u_L^2}{1V} - 5u_L + 4V = 0 \xrightarrow[\text{Faktorisierung}]{} (u_L - 4V)(u_L - 1V) = 0 \Rightarrow u_L = 1V \text{ und } u_L = 4V$$ sind Lösungen

Es gilt:
$u_L = 1V \geq 1V$ und $u_L = 4V \geq 1V$ ⇒ Schnittpunkte S2$(1V, 2A)$ und S3$(4V; 5A)$ sind auch Arbeitspunkte AP2$(1V, 2A)$, AP3$(4V, 5A)$

f) Linearisierung ist die Approximation der Kennlinie mittels einer Gerade mit der Gleichung $i = G\cdot(u-u_0)+i_0$, wobei u_0 und i_0 die Arbeitspunktgrößen sind. G ist ja die Steigung dieser Gerade, was durch die Ableitung $\left.\frac{\partial i}{\partial u}\right|_{AP}$ gewertet im AP bestimmt wird.
⇒ Wir sollen um AP2(1V, 2A) die Lastkennlinie linearisieren. Dieser Arbeitspunkt befindet sich im III. Bereich, deswegen lautet unsere Ausgangsgleichung:

$$i_L = \left(\frac{u_L - 2V}{1V}\right)^2 \cdot 1A + 1A$$

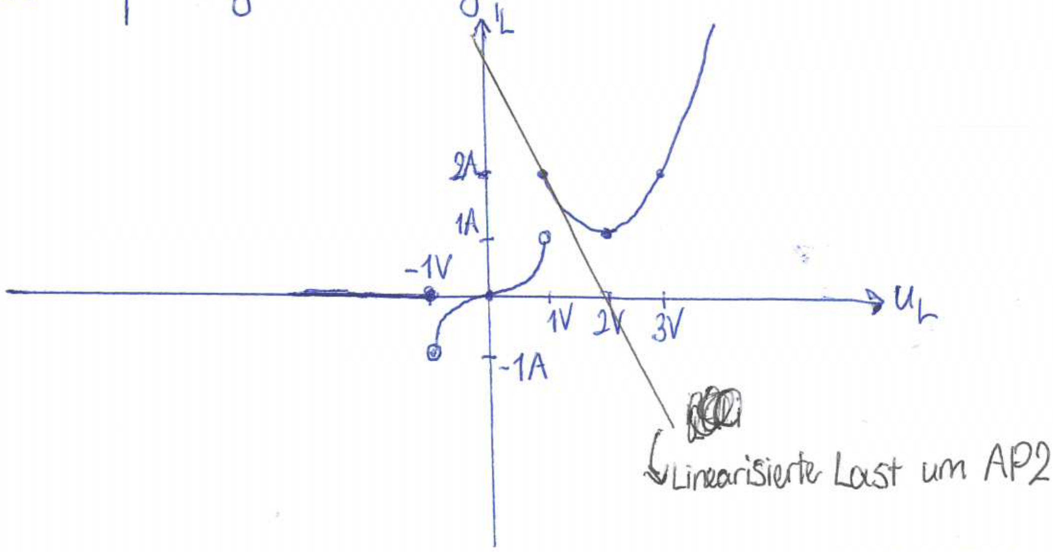
⇒ Die Ableitung bewertet im AP2 lautet:

$$\left.\frac{\partial i_L}{\partial u_L}\right|_{AP} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{u_L-2V}{1V}\right)^2 \cdot 1A + 1A\right]\Bigg|_{(1V,2A)} = 2\left(\frac{u_L-2V}{1V}\right)\cdot\overbrace{\frac{1A}{1V}}^{1S}\Bigg|_{u_L=1V} = -2S$$

Die Arbeitspunktgrößen lauten: $u_{AP}=1V$, $i_{AP}=2A$

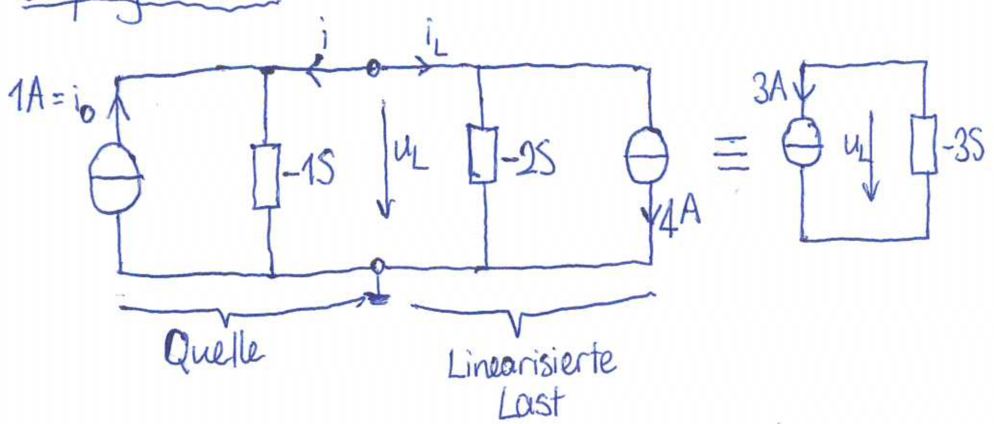
⇒ Linearisierte Last L um AP2: $i_L = -2S(u_L - 1V) + 2A$

→ Diese Gerade entspricht genau der Tangente der Lastkennlinie am AP2:



g) Die Last ist jetzt linearisiert und gehorcht einer affinen Geradengleichung. Deswegen können wir jetzt sie mit einer Quelle mit Innenleitwert ersetzen:
Formt man die Gleichung um: $i_L = -2S\cdot u_L + 4A$, so sieht man, dass eine Stromquelle mit 4A und Innenleitwert mit -2S vom Bedarf sind. Wir wissen auch, dass $\Delta i_0 = 0$ gilt.

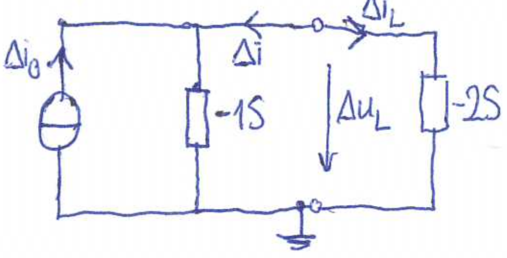
⇒ <u>Großsignal-ESB:</u>



→ Man beachte hier, dass der Strom 4A der Ersatzstromquelle in der gleichen Richtung wie i_L fließen soll.

h) Kleinsignalanalyse ist nichts anderes als eine Koordinatentransformation. Man wählt den Arbeitspunkt im ursprünglichen Koordinatensystem als Ursprung des Neuen. Deswegen sollen Gleichanteile des Stroms und der Spannung, das entspricht der Verschwindung aller konstanten unabhängigen Quellen. Diese Quellen werden mit einer entsprechenden Nullquelle ersetzt.

$\Rightarrow$ Kleinsignal-ESB (Man beachte $\Delta i_0 \neq 0$ jetzt):



$\rightarrow$ Anmerkung: Beschriften Sie alle Signale mit Δu, bzw. Δi. D.h. man beachte nun nur die Wechselanteile dieser Signale.