MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 4

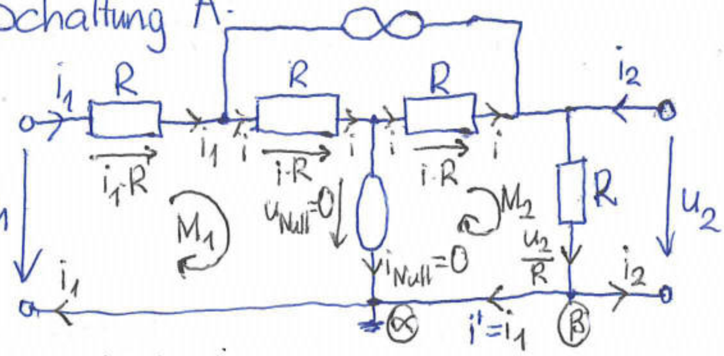
A1)

a) Zunächst schauen wir uns, was die Begriffe Widerstandsbeschreibung und „by inspection" bedeuten. Eine Widerstandsbeschreibung eines Zweitors heißt Bildung zweier Gleichungen, nämlich:

$$u_1 = r_1(i_1, i_2)$$
$$u_2 = r_2(i_1, i_2)$$

, wobei diese Gleichungen nicht unbedingt die Form $u_1 = r_{11} \cdot i_1 + r_{12} \cdot i_2$ und analog bei u_2 haben sollten, was aber bei streng linearen Zweitoren der Fall wäre. By inspection definiert ein Verfahren ohne allgemein definierte Vorgehensweise. D.h. man versucht durch scharfes Hinschauen und mit Hilfe von KCL, KVL, Ohmsches Gesetz und weitere Beschreibungen der Bauelemente auf die geforderte Gleichung zu kommen. Man eliminiert sozusagen die Größen, die nicht vorkommen dürfen.

→ Schaltung A:



→ Man definiere die Hilfsgröße i, wie in Abbildung.

→ Die Spannungen der Bauelemente berechnet man mithilfe Ohmsches Gesetzes.

→ Torbedingung: In ein Tor reinfließender Strom muss auch aus diesem Tor rausfließen.

Masche M_1:

KVL: $-u_1 + i_1 \cdot R + i \cdot R + \overbrace{u_{Null}}^{0V} = 0$

$\Rightarrow u_1 = i_1 \cdot R + i \cdot R$ (Man soll hier i eliminieren) $\Rightarrow$ Masche M_2: KVL: $i \cdot R + \frac{u_2}{R} \cdot R - \overbrace{u_{Null}}^{=0V} = 0$

$\Rightarrow i = \frac{-u_2}{R}$

Knoten α: KCL: $i_1 - \underbrace{i_{Null}}_{=0} = i' \Rightarrow i' = i_1$

Knoten β: KCL: $i_1 + i_2 - \frac{u_2}{R} = 0 \Rightarrow \frac{u_2}{R} = i_1 + i_2 \Rightarrow u_2 = R \cdot i_1 + R \cdot i_2$ (Gleichung 2 ist schon bestimmt)

Einsetzen

$u_1 = i_1 \cdot R + i \cdot R = i_1 R - \frac{u_2}{R} \cdot R = i_1 \cdot R - u_2 \Rightarrow u_1 = i_1 \cdot R - u_2$

einsetzen $i = \frac{-u_2}{R}$

$\Rightarrow u_1 = \cancel{i_1 R} - \cancel{i_1 R} - i_2 \cdot R = -i_2 \cdot R$

$\Rightarrow u_1 = -i_2 \cdot R$ (Gleichung 1 ist auch bestimmt.)

→ Anmerkung: Wenn man wie oben u_1 oder u_2 nicht direkt in Abhängigkeit von i_1, i_2 beschreiben kann, ist es sinnvoll ~~~~ u_1 in Abhängigkeit von u_2, i_1 und i_2 zu bestimmen. Dann fährt man mit der Bestimmung von u_2 fort und wenn man die Gleichung $u_2 = r(i_1, i_2)$ bestimmt hat, setzt man es einfach in die Gleichung von u_1 ein. Endlich kommt man dann zur Gleichung $u_1 = g(i_1, i_2)$, was erwünscht ist. Diese Anmerkung kann man für andere Beschreibungen erweitern und nutzen.

→ Widerstandsbeschreibung:

$$\underline{u} = \underline{r}(\underline{i}) \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= -i_2 \cdot R \\ u_2 &= i_1 \cdot R + i_2 \cdot R \end{aligned}$$

→ Es ist jetzt offenkundig, dass die Widerstandsmatrix existiert, da in den Gleichungen keine Terme, wie $i_1 \cdot i_2$ usw. vorkommt. $\underset{\sim}{R}$ lautet in diesem Fall:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & R \end{bmatrix}$$

, ~~~~ womit man die Widerstandsbeschreibung in Matrix-Vektor-Notation schreiben kann:

$$\underline{u} = \underset{\sim}{R} \cdot \underline{i} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

→ Die Bedingung, dass die Widerstandsbeschreibung als Matrix aufgefasst werden kann, ist, dass das Zweitor A streng linear ist, was in unserem Fall erfüllt ist.

b) Die Kernbeschreibung ist das Äquivalente der impliziten Beschreibung bei Eintoren, für Zweitore. Sie hat die Form:

$$[\underset{\sim}{M} \; \underset{\sim}{N}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \hline \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & n_{21} & n_{22} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen bestimmt man, indem man die beiden konstituierenden Gleichungen aufstellt und die Koeffizienten der Betriebsgrößen (u_1, u_2, i_1, i_2) bestimmt. In unserem Fall ist die Bestimmung der Kernbeschreibung recht einfach, da wir schon eine explizite Beschreibung aus Aufgabe a), kennen. Wir müssen nur die Gleichungen in Form $a \cdot u_1 + b \cdot i_1 + c \cdot i_2 = 0$ bringen und die Koeffizienten bestimmen.

→ Widerstandsbeschreibung noch einmal:

$$u_1 = -i_2 \cdot R \Rightarrow u_1 + i_2 \cdot R = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot i_1 + R \cdot i_2 = 0$$

$$u_2 = i_1 \cdot R + i_2 \cdot R \Rightarrow u_2 - i_1 \cdot R - i_2 \cdot R = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + R \cdot i_1 - R \cdot i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{N} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -R & -R \end{bmatrix} \Rightarrow$$

<u>Kernbeschreibung:</u>

$$[\underset{\sim}{M}\ \underset{\sim}{N}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & -R & -R \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ <u>Anmerkung:</u> Wie man hier leicht merkt, ist $\underset{\sim}{M}$ die Einheitsmatrix und $\underset{\sim}{N}$ die negative Widerstandsmatrix $-\underset{\sim}{R}$. Die Kernbeschreibung ist in dieser Gestalt, da wir aus der Widerstandsbeschreibung ausgegangen sind. Es ist also einfach, eine Kernbeschreibung zu bestimmen, wenn man eine explizite Beschreibung im Hand hat. Man setzt die Spalten der negativen expliziten Beschreibungsmatrix in entsprechende Spalten ein, nämlich in die, die mit den steuernden Größen (in unserem Fall i_1, i_2) multipliziert werden. Die anderen Größen bilden die linke Seite der expliziten Beschreibungsgleichungen und deswegen sind die anderen beiden Spalten mit einer Einheitsmatrix ersetzt.

Beispiel dazu: inverse Hybridmatrix:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\text{gesteuerte Größen}} = \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{12}' \\ h_{21}' & h_{22}' \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{steuernde Größen}} \Rightarrow \begin{bmatrix} -h_{11}' & \underbrace{0 \quad 1} & -h_{12}' \\ -h_{21}' & 1 \quad 0 & -h_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wird mit u_1 multipliziert

diesmal eine umgekehrte Einheitsmatrix, da i_1 oben in der linken Seite steht.

→ Das negative Vorzeichen von $\underset{\sim}{R}$ oder $\underset{\sim}{H}'$ kommt vor, da die rechte Seite der expliziten Beschreibung auch in die linke Seite übergebracht wird, um die Struktur $\underline{u} - \underset{\sim}{R} \cdot \underline{i} = \underline{0}$ zu erhalten.

c) → <u>Anmerkung:</u> Die obige Anmerkung kann man auch in umgekehrter Richtung zunutze machen. Es ist in der Praxis einfacher eine Kernbeschreibung einer Schaltung zu bestimmen, als eine Explizite. Wenn man aber die Kernbeschreibung hat, ist es einfach eine explizite Beschreibung zu bilden, indem man die Kernbeschreibung von links mit einer geeigneten invertierbaren 2x2-Matrix multipliziert. Eine geeignete Matrix heißt an dieser Stelle so, dass nach der Multiplikation die Spalten, die die Koeffizienten von gesteuerten Größen beinhalten zusammengefasst eine Einheitsmatrix bilden.

Das heißt, dass man die beiden Spalten als Matrix zusammenfasst und die Inverse davon bildet. Diese Matrix ist dann die sogenannte Transformationsmatrix, die von links mit der Kernbeschreibung multipliziert wird. Die anderen beiden Spalten, die nach der Multiplikation entstehen, bilden zusammen die negative der gesuchten Zweitormatrix.

<u>Achtung:</u> Bei Ketten-, bzw. inverse Kettenbeschreibung auf das negative Vorzeichen von i_2, bzw. i_1 achten!

Beispiel dazu: Man suche die Hybridbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ist gegeben.

u_1 und i_2 sind gesteuerte Größen $\Rightarrow$ Wir nehmen die Spalten 1 und 4:

$\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ und invertieren diese und bekommen T: $T = \begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

Mit einer Linksmultiplikation erreichen wir dann unser Ziel:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & n_{12} \\ m_{21} & n_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & m_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} & -h_{11} & 0 \\ 0 & -h_{22} & -h_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

umgekehrt, da i_1 die erste steuernde Größe ist.

→ Bei Kettenbeschreibungen die Spalte aus den Koeffizienten von dem steuernden Strom nicht mit -1 multiplizieren, da per Definition die Kettenbeschreibungen $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix}$ lauten.

Also: Man suche die Kettenbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$

$$T = \begin{bmatrix} m_{11} & n_{11} \\ m_{21} & n_{21} \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & n_{11} \\ m_{21} & n_{21} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & -a_{21} & 1 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

→ inversebildung bei Matrizen:

Eine allgemein gültige und beliebte Methode für die Invertierung einer Matrix ist die Gauß-Jordan-Methode, was im Rahmen der Mathematikvorlesung ausführlich behandelt wird. Deswegen soll auf dieses Verfahren hier nicht weiter eingegangen werden.

Eine andere Methode, was nur bei 2x2-Matrizen funktioniert und für Zweitore demnach sehr nützlich ist, lautet folgendermaßen:

Matrix M laute:

$$\underset{\sim}{M}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Die Determinante berechnet man, indem die Elemente auf der Hauptdiagonale miteinander multipliziert und Produkt der Nebendiagonalenelemente davon subtrahiert wird: $\det \underset{\sim}{M} = a \cdot d - c \cdot b$

Die Inverse bekommt man dann einfach, indem die Elemente der Hauptdiagonale miteinander vertauscht werden und die Elemente ~~mit negativ~~ der Nebendiagonale mit negativem Vorzeichen versehen werden. Schließlich dividiert man sämtliche Elemente durch die Determinante und bekommt $\underset{\sim}{M}^{-1}$:

$$\underset{\sim}{M}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Eine Matrix ist genau dann nicht invertierbar oder singulär, wenn ihre Determinante gleich Null ist.

→ Kommt man erst richtig zur Teilaufgabe c:

Die Kernbeschreibung lautet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & -R & -R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ und man sucht die Leitwertsmatrix $\underset{\sim}{G}$.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Da die Ströme bei Leitwertsbeschreibung gesteuerte Größen sind, nimmt man die letzten beiden Spalten und bildet die Inverse dieser 2x2-Matrix um in diesem Fall geeignete Transformationsmatrix $\underset{\sim}{T}$ zu bekommen:

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -R & -R \end{bmatrix}^{-1} \quad = \det T^{-1} = 0\cdot(-R) - R\cdot(-R) = R^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{R^2}\begin{bmatrix} -R & -R \\ R & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R} & \frac{-1}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

→ Um die Leitwertsmatrix zu bestimmen, soll man die Kernbeschreibung von links mit T multiplizieren.

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{R} & \frac{-1}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 & -R & -R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R} & \frac{-1}{R} & 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

→ Die **linke** Hälfte der Kernbeschreibung ist jetzt $-\underset{\sim}{G}$.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{-1}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

→ Die rechte Hälfte entspricht der Einheitsmatrix, d.h. dass wir die Inverse richtig aufgestellt haben und die Matrix $\underset{\sim}{G}$ hat die Elemente vom Dimension $\frac{1}{\Omega}$ oder S, das passt auch.

d) Wir sollen aus der Widerstandsmatrix ausgehen, deswegen schreiben wir sie nochmal auf: $\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & R \end{bmatrix}$.

Die entsprechende Formel aus der Tabelle aus S. 56 des Skriptums befindet sich in der 2. Zeile 1. Spalte:

$$\underset{\sim}{G} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{R}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$$

Die Determinante von $\underset{\sim}{R}$ lautet: $\det \underset{\sim}{R} = 0\cdot R - R\cdot(-R) = R^2$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{G} = \frac{1}{R^2}\begin{bmatrix} R & R \\ -R & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{-1}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

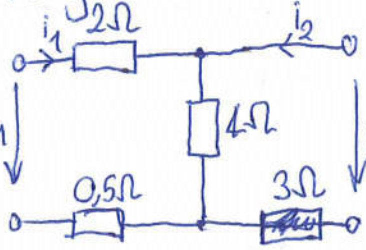
was genau unseren Ergebnis aus Teilaufgabe c entspricht, Damit ist unsere Antwort verifiziert.

e) Die Leerlauf-Kurzschluss-Methode ist ein anderes Verfahren um explizite Beschreibungen zu bestimmen. Man setzt eins der beiden steuernden Größen zu Null und bestimmt die beiden gesteuerten Größen in Abhängigkeit von der anderen steuernden Größe. Man wiederholt dann denselben Prozess, wobei jetzt die zweite steuernde Größe zu Null gesetzt wird und die gesteuerten Größen in Abhängigkeit von der ersten steuernden Größe bestimmt werden. Zu Null setzen heißt für Spannungen den Tor mit einem Kurzschluss und für Ströme mit einem Leerlauf zu beschalten.

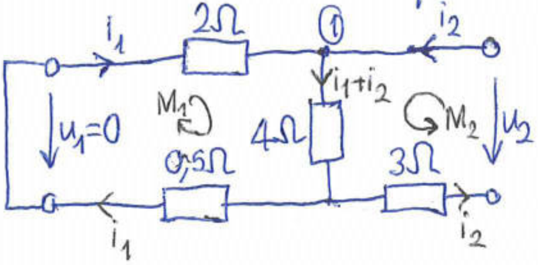
→ Man soll hier die Leitwertsmatrix bestimmen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{gesteuerte Größen}} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\text{steuernde Größen.}}$$

→ Schaltung B:



Man setzt zunächst die erste steuernde Größe u_1 zu Null, was einer Beschaltung des ersten Tors mit KS entspricht.



→ Man soll jetzt

$$g_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} \quad \text{und} \quad g_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0} \quad \text{bestimmen.}$$

→ Für die Analyse benutzt man die Torbedingungen und KCL beim Knoten ①, allerersten.

→ Zunächst soll man die Information der „zu Null Setzung" verwenden:

Masche M_1: $i_1 \cdot 2\Omega + i_1 \cdot 4\Omega + i_2 \cdot 4\Omega + i_1 \cdot 0{,}5\Omega = 0 \Rightarrow i_1 \cdot 6{,}5\Omega = -i_2 \cdot 4\Omega$

→ Dann bestimme man die gesuchten Leitwerte:

einsetzen: $i_2 = i_1 \cdot \frac{-6{,}5}{4} = -i_1 \cdot \frac{13}{8}$

M_2: $-u_2 + i_1 \cdot 4\Omega + i_2 \cdot 4\Omega + i_2 \cdot 3\Omega = 0 \Rightarrow u_2 = i_1 \cdot 4\Omega + i_2 \cdot 7\Omega$

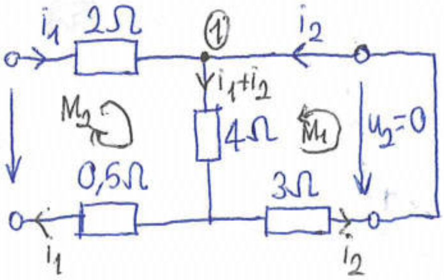
$$\Rightarrow u_2 = i_1 \cdot 4\Omega - i_1 \cdot \frac{13}{8} \cdot 7\Omega = i_1 \left(4\Omega - \frac{13 \cdot 7\Omega}{8}\right) = i_1 \cdot \left(\frac{32\Omega - 91\Omega}{8}\right) = i_1 \cdot \frac{-59\Omega}{8} \Rightarrow i_1 = \frac{-8}{59} S \cdot u_2$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{12} = \frac{-8}{59} S}$$

→ Zweite analog:

$$i_1 = -i_2 \cdot \frac{4}{6{,}5} = -i_2 \cdot \frac{8}{13} \overset{\text{einsetzen}}{\Rightarrow} \cancel{+}i_2 \cdot \frac{8}{13} = \frac{\cancel{+}8}{59} S \cdot u_2 \Rightarrow i_2 = \frac{13}{59} S \cdot u_2 \Rightarrow \boxed{g_{22} = \frac{13}{59} S}$$

Nun wird die zweite steuernde Größe u_2 zu Null gesetzt, was einer Beschaltung des zweiten Tores mit einem KS entspricht.



→ Man hat wieder die Torbedingungen und KCL am Knoten ① zunutze gemacht.

→ Jetzt soll man $g_{11}=\frac{i_1}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ und $g_{21}=\frac{i_2}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ bestimmen, wobei zuerst wieder die Information durch $u_2=0$ beachtet wird.

Masche M_1: $i_1\cdot 4\Omega+i_2\cdot 4\Omega+i_2\cdot 3\Omega=0 \Rightarrow i_1\cdot 4\Omega=-i_2\cdot 7\Omega$ einsetzen: $i_2=\frac{-4}{7}\cdot i_1$

→ Dann folgt die Bestimmung beider Leitwerte:

Masche M_2: $-u_1+i_1\cdot 2\Omega+i_1\cdot 4\Omega+i_2\cdot 4\Omega+i_1\cdot 0{,}5\Omega=0 \Rightarrow u_1=i_1\cdot 6{,}5\Omega+i_2\cdot 4\Omega$

$$\Rightarrow u_1=i_1\cdot 6{,}5\Omega-i_1\cdot\frac{4}{7}\cdot 4\Omega=i_1\left(\frac{13}{2}\Omega-\frac{16}{7}\Omega\right)=i_1\left(\frac{13\cdot 7\Omega-16\cdot 2\Omega}{14}\right)=i_1\cdot\left(\frac{91\Omega-32\Omega}{14}\right)=i_1\cdot\frac{59\Omega}{14}$$

$$\Rightarrow u_1=i_1\cdot\frac{59\Omega}{14}\Rightarrow i_1=u_1\cdot\frac{14}{59}S\Rightarrow\boxed{g_{11}=\frac{14}{59}S}$$

→ Zweite analog:

$$i_1=\frac{-7}{4}\cdot i_2\Rightarrow\frac{-7}{4}\cdot i_2=\frac{14}{59}S\cdot u_1\Rightarrow i_2=u_1\cdot\frac{-4\cdot\cancel{14}^{2}}{\cancel{7}\cdot 59}S=u_1\cdot\frac{-8}{59}S$$

$$\Rightarrow\boxed{g_{21}=\frac{-8}{59}S}$$

→ Letztendlich kann die Leitwertsmatrix angegeben werden:

$$\underset{\sim}{G}=\begin{bmatrix}\frac{14}{59}S & \frac{-8}{59}S\\ \frac{-8}{59}S & \frac{13}{58}S\end{bmatrix}$$

f) Die Bildbeschreibung ist die Äquivalente der parametrischen Beschreibung bei ~~[illegible]~~ Eintoren, für Zweitore. Sie hat die Form:

$$\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{U}\\ \underset{\sim}{I}\end{bmatrix}\cdot\underline{c}\iff\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_1\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\\i_{11}&i_{12}\\i_{21}&i_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix},\quad\underline{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$ ist der Parameter.

Die 4x2-Matrix kann man so bestimmen, dass man zwei linear unabhängige Vektoren nebeneinander schreibt, die der Schaltungsbeschreibung genügen. Mithilfe der Leitwertsmatrix $\underset{\sim}{G}$ kann man diese beiden Messvektoren einfach bestimmen.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{59}S & \frac{-8}{59}S \\ \frac{-8}{59}S & \frac{13}{59}S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

→ Um sicherzustellen, dass beide Messvektoren linear unabhängig sind, kann man den Trick anwenden, wobei man für erste Vektor die erste steuernde Größe Null wählt und andere ungleich Null und für zweite Vektor andersum. Dann kann man die Vektoren nicht durch Skalierung ineinander umwandeln, was genau die Definition der linearen Unabhängigkeit ist.

→ Man wähle $u_1 = 0V$, $u_2 = 59V$.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow i_1 = \frac{14}{59}S \cdot \underbrace{u_1}_{0V} - \frac{8}{59}S \cdot \underbrace{u_2}_{59V} = -8A \\ &\Rightarrow i_2 = \frac{-8}{59}S \cdot u_1 + \frac{13}{59}S \cdot u_2 = 13A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vektor 1: } \begin{bmatrix} 0V \\ 59V \\ -8A \\ 13A \end{bmatrix}$$

→ Man wähle nun $u_1 = 59V$, $u_2 = 0V$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow i_1 = \frac{14}{59}S \cdot u_1 - \frac{8}{59}S \cdot u_2 = 14A \\ &\Rightarrow i_2 = \frac{-8}{59}S \cdot u_1 + \frac{13}{59}S \cdot u_2 = -8A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Vektor 2: } \begin{bmatrix} 59V \\ 0V \\ 14A \\ -8A \end{bmatrix}$$

→ Bildbeschreibung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0V & 59V \\ 59V & 0V \\ -8A & 14A \\ 13A & -8A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

→ Die Vektor $[0,0,0,0]^T$ darf nicht als Messvektor verwendet werden, da sie immer linear abhängt. D.h. man kann jede beliebige Vektor durch Skalierung mit 0 zu dieser Nullvektor umwandeln.

→ <u>Anmerkung:</u> Die Bildbeschreibung könnte man hier noch einfacher ausgehend von der Leitwertsmatrix bestimmen. Nämlich wählt man $\underset{\sim}{U}$ als Einheitsmatrix und $\underset{\sim}{I}$ als Leitwertsmatrix $\underset{\sim}{G}$, bekommt man auch eine gültige Bildbeschreibung. Das bedeutet, dass die obige Lösung nicht eindeutige Lösung ist. Weitere Lösungen, die aus linear unabhängigen, den Bauelementbeschreibungen genügenden Vektoren bestehen, sind auch richtig. Diese einfache Bestimmung kann man auch mit anderen expliziten Beschreibungen durchführen, wobei die neben steuernden Größen stehende Spalten eine Einheitsmatrix und die anderen beiden die Zweitormatrix bilden. Bei Kettenbeschreibungen ist wieder auf negatives Vorzeichen des steuernden Stroms zu achten!

g) → Anmerkung: Die obige Anmerkung kann analog zur Kernbeschreibung in umgekehrter Richtung, zur Bestimmung expliziter Beschreibungen ausgehend von der Bildbeschreibung genutzt werden. Man bekommt aber diesmal die Transformationsmatrix so, dass die Zeilen neben steuernden Größen als Matrix zusammengefasst und invertiert werden. Dann soll man die $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}$-Matrix diesmal von rechts mit $\underset{\sim}{T}$ multiplizieren.

Die Zeilen neben den steuernden Größen sollen jetzt eine Einheitsmatrix bilden und die anderen beiden Zeilen bilden diesmal die Zweitormatrix direkt, aber nicht das negative davon. Man soll hier wiederum auf negatives Vorzeichen bei Kettenbeschreibungen achten.

→ Man soll jetzt die Kettenmatrix bestimmen.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}}_{\text{gesteuerte Größen}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}}_{\text{steuernde Größen}}$$

→ Bildbeschreibung:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0V & 59V \\ 59V & 0V \\ -8A & 14A \\ 13A & -8A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 59V & 0V \\ 13A & -8A \end{bmatrix}, \quad \det \underset{\sim}{T}^{-1} = -59V \cdot 8A - 0V \cdot 13A = -59V \cdot 8A$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{T} = \frac{-1}{59V \cdot 8A} \begin{bmatrix} -8A & 0V \\ -13A & 59V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{59V} & 0 \cdot \frac{1}{A} \\ \frac{13}{59V \cdot 8} & \frac{-1}{8A} \end{bmatrix}$$

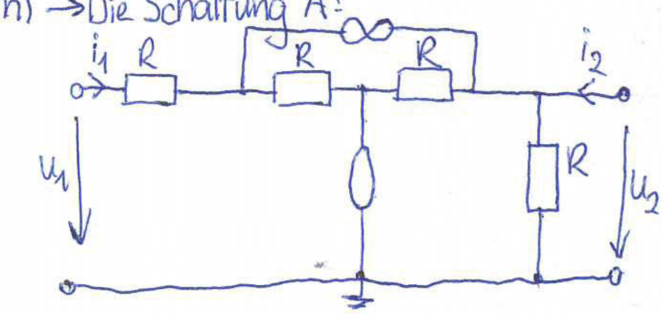
⇒ Rechtsmultiplikation mit $\underset{\sim}{T}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0V & 59V \\ 59V & 0V \\ -8A & 14A \\ 13A & -8A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{59V} & 0 \cdot \frac{1}{A} \\ \frac{13}{59V \cdot 8} & \frac{-1}{8A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{-59V}{8A} \\ 1 & 0 \frac{V}{A} \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{A}{V} & -\frac{14}{8} \\ 0 \frac{A}{V} & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}} \Rightarrow$$

Parameter wird geändert, damit linke Seite nicht geändert werden muss.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{59V}{8A} \\ 1 & 0 \frac{V}{A} \\ \frac{1A}{4V} & \frac{14}{8} \\ 0 \frac{A}{V} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{59}{8} \Omega \\ \frac{1}{4} S & \frac{14}{8} \end{bmatrix}$$

h) → Die Schaltung A:



$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & R \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{-1}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

- Die Schaltung besitzt keine konstante Quellen. ⇒ A ist quellenfrei. (Oder $[0,0,0,0]^T$ ist ein gültiger Betriebspunkt. ⇒ A ist quellenfrei)
- Wenn man Zeilen und Spalten von $\underset{\sim}{R}$ tauscht, bekommt man: $\begin{bmatrix} R & R \\ -R & 0 \end{bmatrix} \neq \underset{\sim}{R}$.

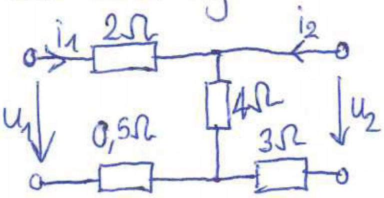
⇒ $\underset{\sim}{R}$ ist unter Zeilen- und Spaltentausch variant. ⇒ A ist <u>nicht</u> umkehrbar

- A besteht nur aus passiven Elementen bis auf Norator. Jedoch modellieren Nullator und Norator hier ein Operationsverstärker, was im Kapitel 6 behandelt werden wird, und auch passiv ist. ⇒ A ist passiv und damit <u>nicht</u> aktiv.
- A besteht aus vielen verlustbehafteten Leitwerte. ⇒ A ist <u>nicht</u> verlustlos.
- Für A existiert sowohl $\underset{\sim}{R}$ als auch $\underset{\sim}{G}$-Matrix. ⇒ A ist sowohl stromgesteuert als auch spannungsgesteuert.

~~→ Die Schaltung B:~~

- $\underset{\sim}{G}$, bzw. $\underset{\sim}{R}$ sind nicht symmetrisch ⟺ $\underset{\sim}{G} \neq \underset{\sim}{G}^T$, $\underset{\sim}{R} \neq \underset{\sim}{R}^T$ ⇒ A ist <u>nicht</u> reziprok.

→ Die Schaltung B:



$$\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \frac{14}{59}S & \frac{-8}{59}S \\ \frac{-8}{59}S & \frac{13}{59}S \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{59}{8}\Omega \\ \frac{1}{4}S & \frac{14}{8} \end{bmatrix}$$

- Die Schaltung besitzt keine konstante Quellen. ($[0,0,0,0]^T$ ist ein gültiger Betriebspunkt) ⇒ B ist quellenfrei.
- Wenn man Zeilen und Spalten von $\underset{\sim}{G}$ tauscht, bekommt man: $\begin{bmatrix} \frac{13}{59}S & \frac{-8}{59}S \\ \frac{-8}{59}S & \frac{14}{59}S \end{bmatrix} \neq \underset{\sim}{G}$

⇒ $\underset{\sim}{G}$ ist unter Zeilen- und Spaltentausch variant.
⇒ B ist nicht umkehrbar.

- B besteht nur aus passiven Elementen. ⇒ B ist passiv und damit <u>nicht</u> aktiv.
- B besteht aus verlustbehafteten Leitwerte. ⇒ B ist <u>nicht</u> verlustlos.
- $\underset{\sim}{G}$ ist symmetrisch. ⟺ $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{G}^T$ ⇒ B ist reziprok.
- $\underset{\sim}{G}$ existiert und ist invertierbar. ⇒ $\underset{\sim}{R}$ existiert auch. ⇒ B sowohl strom- als auch spannungsgesteuert.

A2) Zusatzaufgabe

→ Ausgangsgleichung: $\underset{\sim}{H}' \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{12}' \\ h_{21}' & h_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} i_1 = h_{11}' u_1 + h_{12}' \cdot i_2 \quad (1) \\ u_2 = h_{21}' \cdot u_1 + h_{22}' \cdot i_2 \quad (2) \end{matrix}$

→ Ziel: $\underset{\sim}{A}: \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{A} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} i_1 = h_{11}' u_1 + h_{12}' \cdot i_2$ (u_1 soll eliminiert werden)

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} h_{21}' \cdot u_1 = u_2 - h_{22}' \cdot i_2 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2}{h_{21}'} - i_2 \cdot \frac{h_{22}'}{h_{21}'} \quad (3)$

(3) in (1) einsetzen $\Longrightarrow i_1 = h_{11}' \left(\frac{u_2}{h_{21}'} - i_2 \cdot \frac{h_{22}'}{h_{21}'} \right) + h_{12}' \cdot i_2 = u_2 \cdot \frac{h_{11}'}{h_{21}'} - i_2 \cdot \frac{h_{11}' h_{22}'}{h_{21}'} + i_2 \cdot h_{12}' = u_2 \cdot \frac{h_{11}'}{h_{21}'} + (-i_2) \cdot \left(\frac{h_{11}' h_{22}'}{h_{21}'} - h_{12}' \right)$

$\Rightarrow i_1 = u_2 \cdot \frac{h_{11}'}{h_{21}'} + (-i_2) \cdot \frac{h_{11}' h_{22}' - h_{12}' \cdot h_{21}'}{h_{21}'} \Longrightarrow$ mit $h_{11}' \cdot h_{22}' - h_{12}' \cdot h_{21}' = \det \underset{\sim}{H}'$

$i_1 = \frac{h_{11}'}{h_{21}'} \cdot u_2 + (-i_2) \cdot \frac{\det \underset{\sim}{H}'}{h_{21}'}$

$\Rightarrow a_{21} = \frac{h_{11}'}{h_{21}'}, \quad a_{22} = \frac{\det \underset{\sim}{H}'}{h_{21}'}$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} h_{21}' u_1 = u_2 - h_{22}' \cdot i_2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{h_{21}'} \cdot u_2 + \frac{h_{22}'}{h_{21}'} \cdot (-i_2) \quad \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{h_{21}'}, \; a_{12} = \frac{h_{22}'}{h_{21}'}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A} = \frac{1}{h_{21}'} \begin{bmatrix} 1 & h_{22}' \\ h_{11}' & \det \underset{\sim}{H}' \end{bmatrix}$$

→ Die Vorschrift aus der Tabelle aus S. 56 des Skriptums lautet genauso.

⇒ Die Formel wurde richtig hergeleitet.