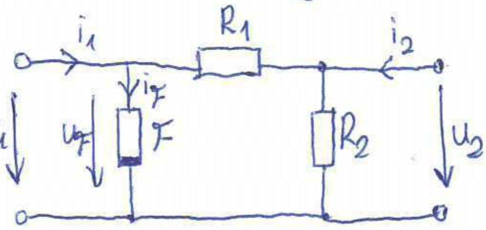
# MUSTERLÖSUNG – Übungsblatt 5

**A1)** Schaltung:




Widerstandsbeschreibung von $\mathcal{F}$:
$$u_{\mathcal{F}} = r(i_{\mathcal{F}}) = U_0 \cdot \ln\left[\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right)^2 + 2\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right) + 1\right], \; U_0 \text{ ist bekannt.}$$

a) In dieser Aufgabe ist das gesamte Zweitor gar nicht von Interesse. Es ist nur nach der Leitwertsbeschreibung des resistiven nichtlinearen Eintors gefragt. Da die Widerstandsbeschreibung schon gegeben ist, sollen wir nur diese nach $i_{\mathcal{F}}$ auflösen. Wenn man es macht, bekommt er $i_{\mathcal{F}}$ in Abhängigkeit von $u_{\mathcal{F}}$, was genau der Leitwertsbeschreibung $i_{\mathcal{F}} = g(u_{\mathcal{F}})$ entspricht.

$$u_{\mathcal{F}} = U_0 \cdot \ln\left[\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right) + 1\right] \;\Big\backslash \cdot \frac{1}{U_0} \;\Rightarrow\; \frac{u_{\mathcal{F}}}{U_0} = \ln\left[\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right) + 1\right]$$

→ An dieser Stelle merkt man, dass $i_{\mathcal{F}}$ in einer ln (≙„logarithmus naturalis") - Funktion drin ist. Um $i_{\mathcal{F}}$ zu extrahieren, muss man die Umkehrfunktion dieser ln-Funktion anwenden. Man setzt sozusagen die Abbildung in die Umkehrabbildung ein, was natürlich die Eingabe identisch ausgibt, da die beiden Funktionen sich aufheben.

→ ln-Funktion ist eine Logarithmusfunktion mit der Basis e (≙ eulersche Zahl). Die Umkehrfunktion zur einen Logarithmusfunktion ist eine Potenzfunktion der Basis des Logarithmus. Beispielsweise ist die Umkehrfunktion des dekadischen (zur Basis 10) Logarithmus ($\log_{10} x$) ist die Potenzfunktion $10^x$. Dementsprechend kann man die ln-Funktion als $\log_e x$ darstellen. Daraus folgt, dass die Umkehrabbildung von ln, $e^x$ (≙ Exponentialfunktion) ist.

→ Man wende diese Funktion auf beide Seiten an:

$$e^{\frac{u_{\mathcal{F}}}{U_0}} = e^{\ln\left[\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right) + 1\right]} \;\Rightarrow\; e^{\frac{u_{\mathcal{F}}}{U_0}} = \left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}\right) + 1$$

→ Jetzt kann man sehen, dass die rechte Seite der Gleichung eine quadratische Funktion von $i_{\mathcal{F}}$ ist. Entweder wendet man die Mitternachtsformel an, oder sieht man direkt, dass sie der ersten binomischen Formel der Gestalt $a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2$ gehorcht, mit $a = \frac{i_{\mathcal{F}}}{1A}$ und $b = 1$. Mithilfe dieser Beobachtung wende man diese Formel an:

$$e^{\frac{u_F}{U_0}} = \left(\frac{i_F}{1A}+1\right)^2$$

→ Schließlich ziehe man die Wurzel von beiden Seiten und bringe 1 über in die andere Seite:

$$\Rightarrow \sqrt{e^{\frac{u_F}{U_0}}} = \left|\frac{i_F}{1A}+1\right| \Leftrightarrow \pm\sqrt{e^{\frac{u_F}{U_0}}} = \frac{i_F}{1A}+1 \Rightarrow -1\pm\sqrt{e^{\frac{u_F}{U_0}}} = \frac{i_F}{1A}$$

→ Man soll hier beachten, dass $\sqrt{x^2}$ nicht $x$ sondern $|x|$ ergibt. Wenn man $x$ hinschreiben würde, wäre die Funktion für $x<0$ nicht definiert, da Wurzel von irgendwas nie negativ ist (im Rahmen der reellen Zahlen). Jedoch ist die Funktion $y=x^2$ auch für $x<0$ definiert. Deswegen lautet die Umkehrabbildung nicht $x=\sqrt{y}$, sondern $x=\pm\sqrt{y}$, oder äquivalent dazu $|x|=\sqrt{y}$.

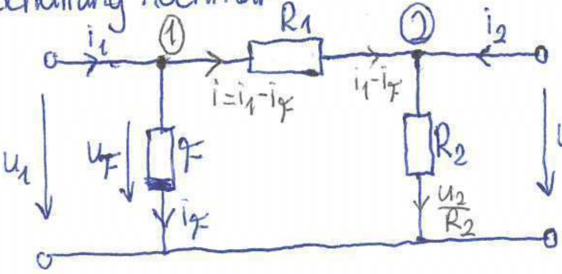
→ Zum Schluss bringe man 1A auch in die andere Seite über und erhalte die Leitwertsbeschreibung von $F$.

$$\Rightarrow i_F = -1A \pm 1A\sqrt{e^{\frac{u_F}{U_0}}} = g(u_F)$$

b) Die inverse Kettenbeschreibung hat die Form: $\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{a}'\begin{pmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1'(u_1,-i_1) \\ a_2'(u_1,-i_1) \end{bmatrix}$

, wobei wiederum auf das negative Vorzeichen vor $i_1$ zu achten ist.

→ Schaltung nochmal:




KCL beim Knoten ①:

$$i_1 - i - i_F = 0 \Rightarrow i = i_1 - i_F$$

Ohmsches Gesetz über $R_2$ und KCL beim Knoten ②:

$$i_1 - i_F + i_2 - \frac{u_2}{R_2} = 0$$

→ Wir suchen $u_2$ und $i_2$ in Abhängigkeit von $u_1, -i_1$. Man löse diese Gleichung nach $u_2$ auf:

$$\Rightarrow \frac{u_2}{R_2} = i_1 + i_2 - i_F \Rightarrow u_2 = R_2\cdot i_1 + R_2\cdot i_2 - R_2\cdot i_F$$

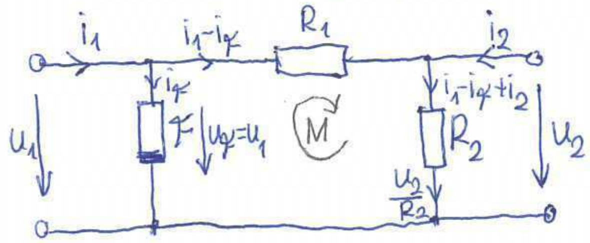
→ Man verwende die Information, dass $i_F$ zur Leitwertsbeschreibung $i_F = g(u_F)$ gehorcht.

$$\Rightarrow u_2 = R_2\cdot i_1 + R_2\cdot i_2 - R_2\cdot g(u_F)$$

→ Man merkt leicht $u_F = u_1$:

$$\Rightarrow u_2 = R_2\cdot i_1 + R_2\cdot i_2 - R_2\cdot g(u_1)$$

→ In dieser obigen Gleichung sind alle Größen erlaubt, bis auf $i_2$. Man muss $i_2$ eliminieren, um die Funktion $u_2 = a_1'(u_1, -i_1)$ zu erhalten.




KVL an Masche M:

$$-u_1 + (i_1 - i_F)R_1 + u_2 = 0 \quad \left(\text{ausmultiplizieren und nach } u_2 \text{ auflösen}\right)$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1 + i_F R_1 - i_1 \cdot R_1$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1 + g(u_F) \cdot R_1 - i_1 \cdot R_1 = u_1 + g(u_1) \cdot R_1 - i_1 \cdot R_1$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1 + g(u_1) \cdot R_1 + (-i_1) \cdot R_1 = a_1'(u_1, -i_1)$$

→ Man merkt an dieser Stelle, dass wir rein mit der Information über diese Masche M, die inverse Kettenbeschreibung der $u_2$ hergeleitet haben. Dafür haben wir die Formel aus der vorherigen Seite gar nicht gebraucht. Das heißt aber nicht, dass die Arbeit für diese Formel umsonst gewesen ist, im Gegenteil können wir $i_2$ mithilfe dieser Gleichung bestimmen, indem wir die Beschreibung für $u_2$ einsetzen und die Gleichung nach $i_2$ auflösen:

$$u_2 = R_2 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 - R_2 \cdot g(u_1) \Rightarrow R_2 \cdot i_2 = u_2 - R_2 \cdot i_1 + R_2 \cdot g(u_1)$$

$u_2 = a_1'(u_1, -i_1)$ einsetzen $\Rightarrow R_2 \cdot i_2 = u_1 + g(u_1) \cdot R_1 - i_1 \cdot R_1 - i_1 \cdot R_2 + g(u_1) R_2 \ \backslash \cdot \frac{1}{R_2}$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{u_1}{R_2} + g(u_1) \cdot \frac{R_1}{R_2} - i_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} - i_1 + g(u_1) \Rightarrow i_2 = \frac{u_1}{R_2} + g(u_1)\left[1 + \frac{R_1}{R_2}\right] + (-i_1) \cdot \left[1 + \frac{R_1}{R_2}\right] = a_2'(u_1, -i_1)$$

⇒ Die inverse Kettenbeschreibung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{a}'\begin{pmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1'(u_1, -i_1) \\ a_2'(u_1, -i_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + g(u_1) \cdot R_1 + (-i_1) \cdot R_1 \\ \frac{u_1}{R_2} + g(u_1)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + (-i_1) \cdot \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \end{bmatrix}$$

→ <u>Anmerkung</u>: In dieser Teilaufgabe haben wir gesehen, wie man mit der by-inspection Methode vorgehen soll. Zunächst haben wir mit KCL gearbeitet und dann versucht, diese Information zur Bestimmung von $u_2$ zu verwenden. Das war die falsche Entscheidung, jedoch schadet es nicht, da wir diese Information nachher für $i_2$ verwendet haben. Also wenn ein Weg nicht mehr weitergeht, soll man eine andere Information verwenden, wie wir mit KVL über Masche M gemacht haben, und damit arbeiten. Schließlich greift man auf die erste Gleichung nochmal auf, wobei diesmal mit Kenntnis der zweiten Information sie weiterhilft. Also nicht aufgeben, weiterarbeiten!

c) Quellenfreiheit von Zweitoren ist analog zu Eintoren definiert, nämlich die Kennfläche beinhaltet den Ursprung des diesmal vierdimensionalen Koordinatensystems. Deswegen ist der geeignete Betriebspunkt, bzw. Vektor, was in der Fragestellung angesprochen ist, der Ursprung $[0,0,0,0]^T$. Da wir schon eine sogar explizite Beschreibung im Hand haben, ist es gar nicht mehr schwer die Quellenfreiheit zu überprüfen. Nämlich sollen wir für die steuernde Größen $u_1$ und $-i_1$ 0V, bzw. 0A einsetzen und gucken, ob die Gleichungen für die gesteuerte Größen $u_2$ und $i_2$ 0 ergeben.

→ ~~Ketten~~ inverse Kettenbeschreibung:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + g(u_1)\cdot R_1 + (-i_1)\cdot R_1 \\ i_2 &= \frac{u_1}{R_2} + g(u_1)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + (-i_1)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) \end{aligned} \xrightarrow[i_1=0A]{u_1=0V} \begin{aligned} u_2 &= 0V + g(0V)\cdot R_1 + 0A\cdot R_1 = g(0V)\cdot R_1 \\ i_2 &= \frac{0V}{R_2} + g(0V)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + 0A\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) = g(0V)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) \end{aligned}$$

→ Man merkt jetzt leicht, dass wenn $g(0V) = 0A$ ergibt, das Zweitor quellenfrei ist. Um dies zu bestimmen soll man auf seine Antwort aus Aufgabe a) zurückgreifen.

→ Leitwertsbeschreibung von $\mathcal{F}$:

$$g(u_\mathcal{F}) = -1A \pm 1A\sqrt{e^{\frac{u_\mathcal{F}}{U_0}}}$$

$$\Rightarrow g(0V) = -1A \pm 1A\underbrace{\sqrt{e^{\frac{0V}{U_0}}}}_{=1} = -1A \pm 1A \Longrightarrow \begin{aligned} g(0V)_1 &= 0A \\ g(0V)_2 &= -2A \end{aligned}$$

→ Wir haben zwei Lösungen, d.h. zwei Werte für $g(0V)$ und beide sind gültige Betriebspunktwerte. Deswegen ist $g(0V)$ auch gültig und wenn man es oben einsetzt, bekommt man:

$u_2 = 0V$, $i_2 = 0A$

$\Rightarrow [0,0,0,0]^T$ ist ein gültiger Betriebspunkt für dieses Zweitor.

$\Rightarrow$ Das Zweitor ist quellenfrei.

d) Wie wir in der letzten Stunde behandelt haben, geht man dann zur Zweitormatrizen über, wenn das entsprechende Zweitor streng linear ist. Das ist genau der Grund, wieso die inverse Kettenmatrix nicht aufgestellt werden kann. Das Zweitor ist nicht linear, wegen des nichtlinearen Eintors $\mathcal{F}$, was eine Komponente von der Schaltung ist.

$\Rightarrow$ Inverse Kettenmatrix existiert nicht, da das Zweitor <u>nicht</u> streng linear ist.

e) Linearisierung resistiver Zweitore ist nichts anderes, als eine Erweiterung der Linearisierung der Eintore. Jedoch hat man diesmal zwei steuernde und zwei gesteuerte Größen. In unserem Fall haben wir die inverse Kettenbeschreibung. Was man bei der Linearisierung macht, ist Approximierung der Kennfläche, die durch zwei Gleichungen bestimmt ist (in unserem Fall $a_1', a_2'$) nach beiden steuernden Größen durch Ableitung linearisieren. Die Anzahl der Ableitungen beträgt im Falle der Zweitore 4. Diese Ableitungen heißen partielle Ableitungen (siehe Mathe), wobei die nicht abgeleitete Größe als Konstante betrachtet wird. Die partiellen Ableitungen werden mit $\frac{\partial y}{\partial x}$ gekennzeichnet. Die Matrix, die diese partielle Ableitungen zusammenfasst heißt die Jacobi-Matrix und wird mit $\underset{\sim}{J}$ gekennzeichnet. Die Formel für Linearisierung für inverse Kettenbeschreibung lautet:

$$u_2 = U_2 + \left.\frac{\partial a_1'(u_1,-i_1)}{\partial u_1}\right|_{AP} \cdot \Delta u_1 + \left.\frac{\partial a_1'(u_1,-i_1)}{\partial(-i_1)}\right|_{AP} \cdot \Delta(-i_1)$$

$$i_2 = I_2 + \left.\frac{\partial a_2'(u_1,-i_1)}{\partial u_1}\right|_{AP} \cdot \Delta u_1 + \left.\frac{\partial a_2'(u_1,-i_1)}{\partial(-i_1)}\right|_{AP} \cdot \Delta(-i_1)$$

, wobei $U_2, I_2$ die Arbeitspunktgrößen sind und $\cdot\big|_{AP}$-Notation die Bewertung im Arbeitspunkt andeutet.

→ Die Arbeitspunktgrößen sind als $U_1, U_2, I_1, I_2]^T$ gegeben und bekannt.
→ Die inverse Kettenbeschreibung lautet:

$$u_2 = u_1 + g(u_1)\cdot R_1 + (-i_1)\cdot R_1$$

$$i_2 = \frac{u_1}{R_2} + g(u_1)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + (-i_1)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \cdot \left.\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right|_{AP} = \left.\frac{\partial a_1'}{\partial u_1}\right|_{AP} = 1 + g'(u_1)\cdot R_1 + 0,\Big|_{AP}$$

da $(-i_1)$ bezüglich $u_1$ eine Konstante ist.

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial a_1'}{\partial u_1}\right|_{AP} = 1 + g'(U_1)\cdot R_1 .$$

$$\cdot \left.\frac{\partial a_1'}{\partial(-i_1)}\right|_{AP} = 0 + 0 + R_1\Big|_{AP} = R_1$$

(Die erste und zweite Terme sind Konstanten bezüglich dieser partiellen Ableitung, da sie nicht von $i_1$ abhängen.)

$$\cdot \left.\frac{\partial a_2'}{\partial u_1}\right|_{AP} = \frac{1}{R_2} + g'(u_1)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) + 0\Big|_{AP} = \frac{1}{R_2} + g'(U_1)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\cdot \left.\frac{\partial a_2'}{\partial(-i_1)}\right|_{AP} = 0 + 0 + 1 + \frac{R_1}{R_2}\Big|_{AP} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

→ Nun bleibt die Bestimmung von $g'(u_1)$ übrig, wofür wir wieder auf Teilaufgabe a) zurückgreifen:

$$g(u_1) = -1A \pm 1A\sqrt{e^{\frac{u_1}{U_0}}}$$

→ Die Ableitung von $e^x$ ist wiederum $e^x$.

→ Die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

→ Die Kettenregel für Ableitung lautet: $g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

⟹ Nachdifferenzieren nicht vergessen!

$$\Rightarrow g'(u_1) = 0 \pm 1A \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{\frac{u_1}{U_0}}}} \cdot \underbrace{e^{\frac{u_1}{U_0}} \cdot \frac{1}{U_0}}_{\text{zweimal nachdifferenzieren!}} = \pm 1A \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{\frac{u_1}{U_0}}}} \cdot e^{\frac{u_1}{U_0}} \cdot \frac{1}{U_0}$$

→ Jacobi-Matrix hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1'}{\partial u_1} & \frac{\partial a_1'}{\partial(-i_1)} \\ \frac{\partial a_2'}{\partial u_1} & \frac{\partial a_2'}{\partial(-i_1)} \end{bmatrix}_{AP} = \begin{bmatrix} 1 \pm 1A \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^{\frac{U_1}{U_0}}}} \cdot \frac{1}{U_0} \cdot e^{\frac{U_1}{U_0}} \cdot R_1 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} \pm 1A \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^{\frac{U_1}{U_0}}}} \cdot \frac{1}{U_0} \cdot e^{\frac{U_1}{U_0}}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) & 1+\frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix}$$

⟹ Die Linearisierung lautet:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+g'(U_1)\cdot R_1 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} + g'(U_1)\cdot\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) & 1+\frac{R_1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta(-i_1) \end{bmatrix}$$

→ Anmerkung: Die Linearisierung kann man auch bei impliziten Beschreibungen durchführen, indem man die partielle Ableitungen der konstituierenden Gleichungen bestimmt und diese als Matrix zusammenfasst (8 partielle Ableitungen). Bei expliziten Beschreibungen ist die Linearisierung aber besonders einfach.

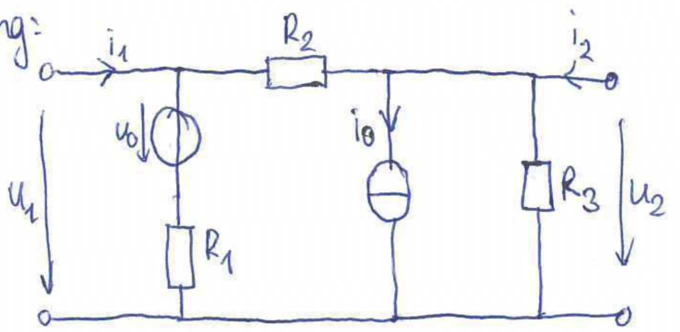
A2)

→ Bei quellenbehafteten Zweitoren existieren streng genommen die Zweitormatrizen nicht, da sie nicht streng linear sind. Aber für lineare quellenbehaftete Zweitoren existieren schon kompakte Darstellungen. Ihre Kennfläche ist nichts anderes als eine affine Ebene, die mit konstanten Quellen aus dem Ursprung verschoben ist. Jedoch kann man gedanklich die konstante Quellen außen ziehen und für das übrig gebliebene streng lineare Zweitor die Zweitormatrix aufstellen. Dann kann man die äußeren Quellen berücksichtigen und den Quellenvektor bestimmen.

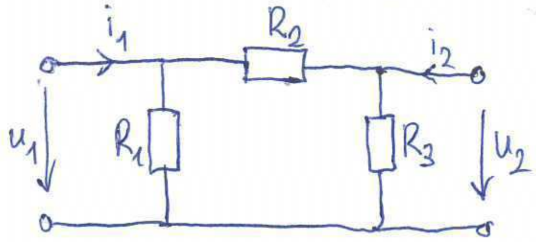
a) → Um die Hybridbeschreibung dieses linearen quellenbehafteten Zweitors zu bestimmen, kann man auf zwei Arten vorgehen.

1) Nach der Methode in der Zusammenfassung:

→ Schaltung:




1.1) Konstante Quellen auf Null setzen: (Spannungsquelle → Kurzschluss, Stromquelle → Leerlauf)



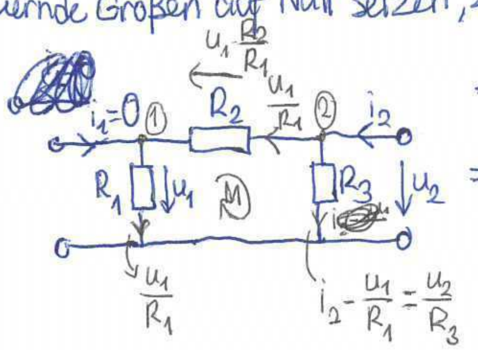

1.2) Hybridmatrix aufstellen (entweder mit KS/LL-Methode oder by-inspection)

→ Hybridmatrix lautet: $\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\text{gesteuerte}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\text{steuernde}}$

→ LL/KS-Methode:

Steuernde Größen auf Null setzen, zuerst $i_1 = 0 \Leftrightarrow$ LL am Tor 1:

$\Rightarrow$




→ Ohmsche Gesetze und KCL am Knoten ① und ② verwenden:

$\Rightarrow \frac{u_2}{R_3} = i_2 - \frac{u_1}{R_1}$

→ KVL bei M:

Terme von $u_1$ in die andere Seite

$-u_1 - \frac{u_1}{R_1} \cdot R_2 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = u_2$

$\Rightarrow u_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = u_2 \Rightarrow u_1 = u_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow \boxed{h_{12} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$

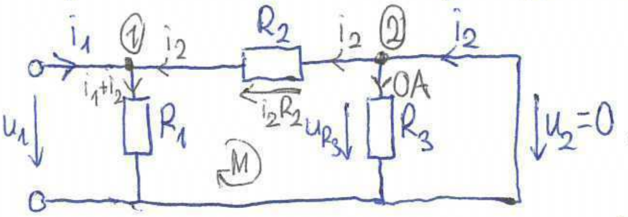
→ Erste Gleichung nach $i_2$ auflösen um $h_{22}=\frac{i_2}{u_2}$ zu bestimmen:

$$\Rightarrow i_2=\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_3} \Longrightarrow i_2=\frac{\cancel{R_1}}{R_1+R_2}\cdot u_2\cdot\frac{1}{\cancel{R_1}}+\frac{u_2}{R_3}=u_2\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

$$u_1=u_2\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{22}=\frac{i_2}{u_2}=\frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)}}$$

→ Nun, zweite steuernde Größe $u_2=0 \Longleftrightarrow$ KS am Tor 2:




→ $u_2=u_{R_3}=0V \Rightarrow u_{R_3}=R_3\cdot i_{R_3} \Rightarrow i_{R_3}=0A$

→ KCL am Knoten ②: $i_2$ geht in den anderen Zweig über.

→ KCL am Knoten ①: $i_1+i_2=i_{R_1}$

→ Ohmsches Gesetz:

$$u_1=(i_1+i_2)\cdot R_1$$

einsetzen $\Rightarrow -i_2\cdot R_2=i_1\cdot R_1+i_2\cdot R_1$

$$i_2\cdot R_1+i_2\cdot R_2=-i_1\cdot R_1$$

$$\Rightarrow i_2(R_1+R_2)=-i_1\cdot R_1$$

→ KVL bei M:

$$-u_1-i_2R_2+\underbrace{u_{R_3}}_{=u_2=0}=0 \Rightarrow u_1=-i_2R_2$$

umformen

$$i_2=\frac{-u_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow i_2=\frac{-R_1}{R_1+R_2}\cdot i_1 \Rightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1}=h_{21}=\frac{-R_1}{R_1+R_2}}$$

in $i_2=\frac{-R_1}{R_1+R_2}\cdot i_1$ einsetzen $\Rightarrow \frac{-u_1}{R_2}=\frac{-R_1}{R_1+R_2}\cdot i_1$

$$\Rightarrow u_1=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\cdot i_1 \Rightarrow \boxed{h_{11}=\frac{u_1}{i_1}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{H}=\begin{bmatrix}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2}\\ \frac{-R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)}\end{bmatrix}$$

1.3) Quellen wieder einschalten, steuernde Größen auf Null setzen (KS/LL):

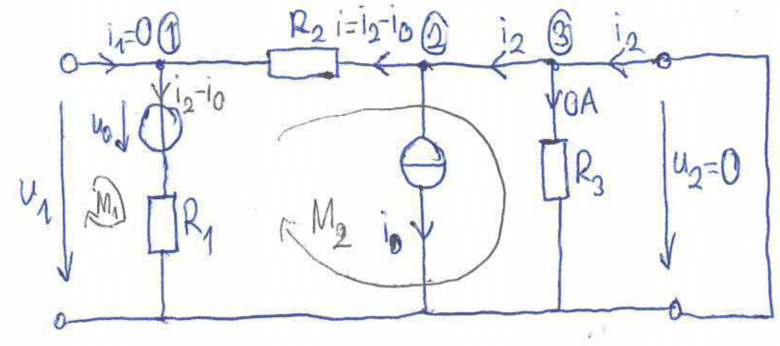
$i_1=0 \Leftrightarrow$ LL am Tor 1 , $u_2=0 \Longleftrightarrow$ KS am Tor 2

1.4) Quellenvektor bestimmen

- $u_{R_3}=u_2=0 \Rightarrow i_{R_3}=0$

KCL beim ③, KCL beim ②, KCL beim ①

$i_2-0=i_2$ $\quad i=i_2-i_0$ $\quad i_2-i_0+0=i_2-i_0$



$\rightarrow$ KVL bei $M_1$: $u_1 = u_0 + (i_2 - i_0)\cdot R_1$ (1)

$\rightarrow$ KVL bei $M_2$: $-u_1 - R_2(i_2 - i_0) + \underbrace{u_{R_3}}_{=u_2=0} = 0 \Rightarrow u_1 = -R_2 \cdot i_2 + R_2 \cdot i_0$ (2)

$\rightarrow$ (2) in (1): $-R_2 i_2 + R_2 \cdot i_0 = u_0 + i_2 \cdot R_1 - i_0 \cdot R_1 \Rightarrow i_2 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2 = R_2 \cdot i_0 + R_1 \cdot i_0 - u_0$

$$\Rightarrow i_2(R_1+R_2) = i_0(R_1+R_2) - u_0 \Rightarrow \boxed{i_2 = i_0 - \frac{1}{R_1+R_2}\cdot u_0} = h_{Q_2} \quad (3)$$

$\rightarrow$ (3) in (2): $u_1 = -\cancel{R_2 i_0} + \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u_0 + \cancel{R_2 i_0} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u_0 = h_{Q_1}}$

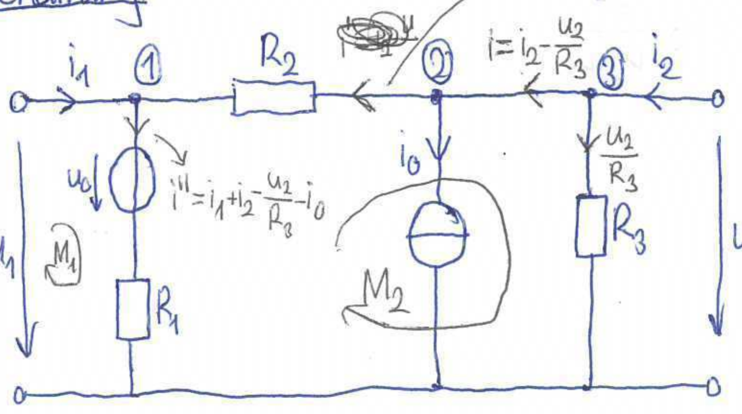
$$\left.\begin{matrix} h_{Q_2} \\ h_{Q_1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow h_Q = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u_0 \\ i_0 - \frac{1}{R_1+R_2}\cdot u_0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hybridbeschreibung des gesamten Zweitors:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ \frac{-R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot u_0 \\ i_0 - \frac{1}{R_1+R_2}\cdot u_0 \end{bmatrix}$$

2) By inspection: Alles auf einmal:

$\rightarrow$ Schaltung:




$\rightarrow$ Ohmsches Gesetz: $i_{R_3} = \frac{u_2}{R_3}$

$\rightarrow$ KCL bei 3: $i + \frac{u_2}{R_3} - i_2 = 0 \Rightarrow i = i_2 - \frac{u_2}{R_3}$

$\rightarrow$ KCL bei 2: $i' + i_0 - i_2 + \frac{u_2}{R_3} = 0$

$$\Rightarrow i' = i_2 - \frac{u_2}{R_3} - i_0$$

$\rightarrow$ KCL bei 1: $i'' - i_1 - i_2 + \frac{u_2}{R_3} + i_0 = 0 \Rightarrow i'' = i_1 + i_2 - \frac{u_2}{R_3} - i_0$

$\rightarrow$ KVL bei $M_1$: $-u_1 + u_0 + u_{R_1} = 0 \Rightarrow u_1 = u_0 + R_1\left(i_1 + i_2 - \frac{u_2}{R_3} - i_0\right)$ (1)

$\rightarrow$ KVL bei $M_2$: $-u_1 - R_2\left(i_2 - \frac{u_2}{R_3} - i_0\right) + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 - R_2 \cdot i_2 + u_2 \cdot \frac{R_2}{R_3} + R_2 \cdot i_0$ (2)

$\rightarrow$ (2) in (1): $u_2 - R_2 \cdot i_2 + u_2 \cdot \frac{R_2}{R_3} + R_2 \cdot i_0 = u_0 + R_1 \cdot i_1 + R_1 \cdot i_2 - u_2 \cdot \frac{R_1}{R_3} - R_1 \cdot i_0$ (nach $i_2$ auflösen)

$$\Rightarrow -R_2 \cdot i_2 - R_1 \cdot i_2 = -u_2 - u_2 \cdot \frac{R_2}{R_3} - R_2 \cdot i_0 + u_0 + R_1 \cdot i_1 - u_2 \cdot \frac{R_1}{R_3} - R_1 \cdot i_0 \quad \backslash \cdot -1$$

$$\Rightarrow i_2(R_1+R_2) = u_2 + u_2 \cdot \frac{R_2}{R_3} + u_2 \cdot \frac{R_1}{R_3} - u_0 + R_2 \cdot i_0 + R_1 \cdot i_0 - R_1 \cdot i_1$$

$\Rightarrow$ (Aufklammern) $i_2(R_1+R_2) = u_2\left(1+\frac{R_2}{R_3}+\frac{R_1}{R_3}\right) - R_1 \cdot i_1 - u_0 + i_0(R_1+R_2)$

$$\Rightarrow i_2(R_1+R_2) = u_2\left(\frac{R_1+R_2+R_3}{R_3}\right) - i_1 \cdot R_1 - u_0 + i_0(R_1+R_2) \quad \backslash \cdot \frac{1}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2 = u_2 \cdot \underbrace{\frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)}}_{= h_{22}} - \underbrace{\frac{R_1}{R_1+R_2}}_{= h_{21}} \cdot i_1 \underbrace{- \frac{1}{R_1+R_2} \cdot u_0 + i_0}_{h_{Q2}}}$$

$\Rightarrow$ (3) in (1): $u_1 = u_0 + R_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot \frac{R_1(R_1+R_2+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} - \frac{R_1^2}{R_1+R_2} \cdot i_1 - \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot u_0 + \cancel{R_1 i_0} - \frac{R_1}{R_3} u_2 - \cancel{R_1 i_0}$

$\Rightarrow$ (Aufklammern)

$$u_1 = u_2\left[\frac{R_1(R_1+R_2+R_3)}{R_3(R_1+R_2)} - \frac{R_1}{R_3}\right] + i_1\left(R_1 - \frac{R_1^2}{R_1+R_2}\right) + u_0\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{R_1}{R_3}\left[\frac{R_1+R_2+R_3}{R_1+R_2} - 1\right] + i_1 \cdot R_1\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right) + u_0\left(\frac{\cancel{R_1}+R_2-\cancel{R_1}}{R_1+R_2}\right)$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{R_1}{R_3}\left(\frac{\cancel{R_1}+\cancel{R_2}+R_3-\cancel{R_1}-\cancel{R_2}}{R_1+R_2}\right) + i_1 \cdot R_1\left(\frac{\cancel{R_1}+R_2-\cancel{R_1}}{R_1+R_2}\right) + u_0 \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{R_1}{\cancel{R_3}} \cdot \frac{\cancel{R_3}}{R_1+R_2} + i_1 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} + u_0 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = u_2 \underbrace{\frac{R_1}{R_1+R_2}}_{= h_{12}} + i_1 \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}}_{= h_{11}} + \underbrace{u_0 \frac{R_2}{R_1+R_2}}_{= h_{Q1}}}$$

$$\Rightarrow \text{Hybridbeschreibung: } \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ \frac{-R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot u_0 \\ i_0 - \frac{1}{R_1+R_2} \cdot u_0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Anmerkung: Beide Verfahren haben Vor- und Nachteile. By inspection ist schneller, aber fehleranfälliger, man muss konzentriert arbeiten. Erste Methode ist einfacher durchzuführen, dauert aber ziemlich länger.

b) Das Ersatzschaltbild mit externen Quellen entspricht unserer gedanklichen Auftrennung der Schaltung zu Beginn der Teilaufgabe a). Man zeichnet das streng lineare Zweitor, was durch die Zweitormatrix (in diesem Fall Hybridmatrix) beschrieben wird. Dann beschaltet man dieses Zweitor mit zwei externen Quellen. Die Art der Quelle wählt man nach der gesteuerten Größe. Wenn die gesteuerte Größe also ein Strom ist, schaltet man dazugehöriges Tor parallel mit einer Stromquelle, wenn sie eine Spannung ist, in Reihe mit einer Spannungsquelle (mehr dazu Skript S. 58). Die Werte der Quellen sollen natürlich dann zum Quellenvektor genügen.

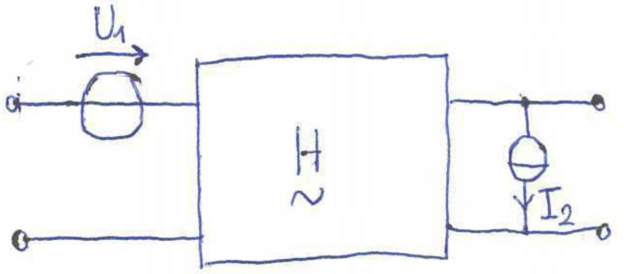
→ Hybridbeschreibung:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ \frac{-R_1}{R_1+R_2} & \frac{R_1+R_2+R_3}{R_3(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot u_0 \\ i_0 - \frac{1}{R_1+R_2} \cdot u_0 \end{bmatrix}$$

→ gesteuerte Größen: $u_1 \Rightarrow$ Spannungsquelle seriell am Tor 1

$i_2 \Rightarrow$ Stromquelle parallel am Tor 2

$\Rightarrow$




mit $U_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot u_0$

$I_2 = i_0 - \frac{1}{R_1+R_2} \cdot u_0$