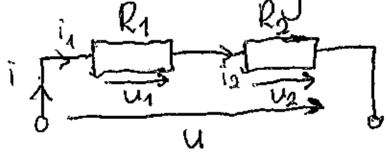
MUSTERLÖSUNG-Übungsblatt 6

A1) a) Zunächst schauen wir uns an, was für Möglichkeiten zur Verschaltung von Zweitoren gibt und welche Beschreibungsformen im Falle der jeweiligen Verschaltung besonders geeignet zum Rechnen sind.

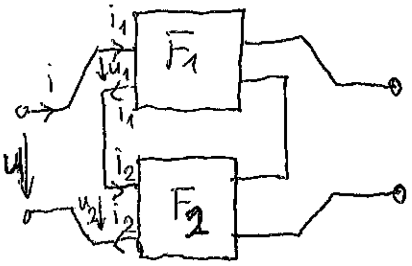
Es gibt hauptsächlich 5 Arten von Verschaltungen der Zweitore, die eigentlich nach den Zweitorbeschreibungen, mit den im Falle dieser Verschaltungen einfach zu rechnen sind, genannt sind. D.h. der Name der Verschaltung verrät schon die Art der besonders geeigneten Beschreibungsform. Der Grund dafür ist, dass man diese Verschaltungen analog zu Eintore nach der Gleichheit der Spannungen, bzw. Ströme nennt. Durch diese Analogie kommt man auf Serien- und Parallelschaltung von Zweitoren:

- Bei Serienschaltung von Eintoren:



gilt: $\left.\begin{array}{l} i=i_1=i_2 \\ u=u_1+u_2 \end{array}\right\}$ $R_{ges}=\frac{u}{i}=\frac{u_1+u_2}{i}=\frac{R_1 i+R_2 i}{i}=R_1+R_2$

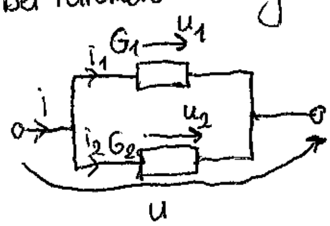
$\Rightarrow$ Serienschaltung von Zweitoren:



gilt: $\left.\begin{array}{l} i=i_1=i_2 \\ u=u_1+u_2 \end{array}\right\}$ (analog dazu im 2. Tor) $\underline{r}_{ges}=\underline{r}_1+\underline{r}_2 \xrightarrow[\text{existieren}]{\text{Wenn die Matrizen}} \underset{\sim}{R}_{ges}=\underset{\sim}{R}_1+\underset{\sim}{R}_2$

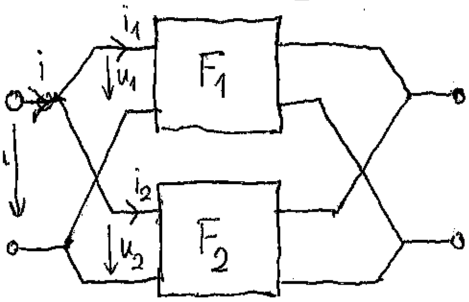
Widerstandsbeschreibung

- Bei Parallelschaltung von Eintoren:



gilt: $\left.\begin{array}{l} u=u_1=u_2 \\ i=i_1+i_2 \end{array}\right\}$ $G_{ges}=\frac{i}{u}=\frac{i_1+i_2}{u}=\frac{G_1\cdot u+G_2\cdot u}{u}=G_1+G_2$

$\Rightarrow$ Parallelschaltung von Zweitoren:

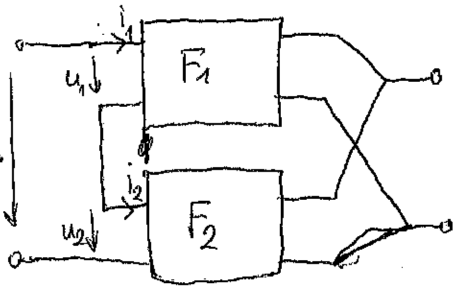


gilt: $\left.\begin{array}{l} u=u_1=u_2 \\ i=i_1+i_2 \end{array}\right\}$ (analog dazu im 2. Tor) $\underline{g}_{ges}=\underline{g}_1+\underline{g}_2 \xrightarrow[\text{existieren}]{\text{Wenn die Matrizen}} \underset{\sim}{G}_{ges}=\underset{\sim}{G}_1+\underset{\sim}{G}_2$

$\rightarrow$ Wie man hier leicht merkt, sind diese beiden Arten völlig analog zu den entsprechenden Verschaltungstypen von Eintoren. Im Falle der strengen Linearität kann man ganz einfach dem gesamten Zweitor charakterisierende Matrix durch eine Matrixaddition ausrechnen.

Die Hybridschaltungen kommen durch Verschaltung eines Tores in Reihe und anderes parallel zustande. Es gibt deswegen zwei Arten von Hybridschaltungen:

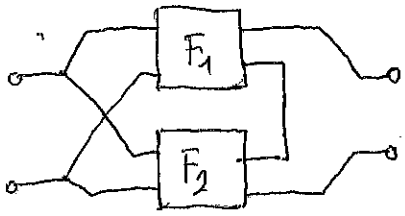
1) $\underbrace{\text{Serien}}_{\text{Tor1}}$-$\underbrace{\text{Parallel}}_{\text{Tor2}}$-Schaltung (Hybrid):



gilt: $\underline{h}_1+\underline{h}_2=\underline{h}_{ges}$

$\underset{\sim}{H}_{ges}=\underset{\sim}{H}_1+\underset{\sim}{H}_2$ (str. linear)

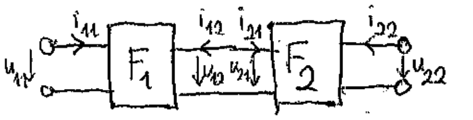
2) $\underbrace{\text{Parallel}}_{\text{Tor 1}}$-$\underbrace{\text{Serien}}_{\text{Tor2}}$-Schaltung (inverse Hybrid):



gilt: $\underline{h}'_{ges}=\underline{h}'_1+\underline{h}'_2$

$\underset{\sim}{H}'_{ges}=\underset{\sim}{H}'_1+\underset{\sim}{H}'_2$ (str. linear)

Die fünfte Typ der Verschaltungen ist die Kettenschaltung, wobei das zweite Tor des ersten Zweitors einfach mit dem ersten Tor des zweiten Zweitors verbunden ist. Eine besondere Eigenschaft der Kettenschaltung ist, dass die Torbedingungen gemäß Kirchhoffscher Gesetze automatisch erfüllt sind, wobei man bei den ersten vier Typen der Verschaltungen immer darauf achten soll, ob diese erfüllt sind. Kettenschaltung sieht folgendermaßen aus:



gilt: $u_{12}=u_{21}$

$\underline{\underline{i_{12}=-i_{21}}}$ ⇒ Deswegen ist bei Kettenbeschreibungen der steuernde Strom mit negativem Vorzeichen versehen.

$\Rightarrow \underline{a}_{ges}=\underline{a}_1\circ\underline{a}_2=\underline{a}_1(\underline{a}_2)$

(str. linear) $\underset{\sim}{A}_{ges}=\underset{\sim}{A}_1\cdot\underset{\sim}{A}_2$

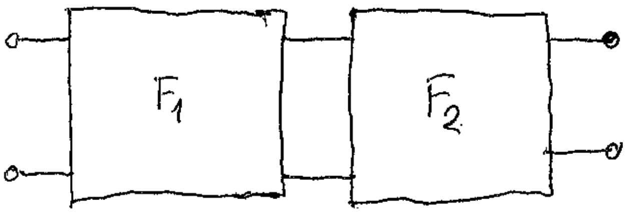
} Das negative Vorzeichen des steuernden Stroms gewährleistet, dass dieser Vorschrift so kompakt ist ∇

• Man kann dementsprechend das Gesamtzweitor auch durch inverse Kettenbeschreibungen charakterisieren. Für die gleiche Schaltung gilt dann:

$\underline{a}'_{ges}=\underline{a}'_2\circ\underline{a}'_1=\underline{a}'_2(\underline{a}'_1) \xRightarrow{\text{str. linear}} \underset{\sim}{A}'_{ges}=\underset{\sim}{A}'_2\cdot\underset{\sim}{A}'_1$,

wobei man beachten soll, dass im Allgemeinen die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

→ Wenn man richtig zur Teilaufgabe a) kommt, soll man betrachten, wie H_1 ausschaut:

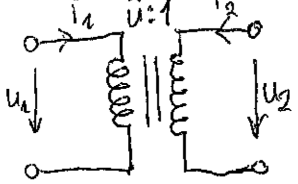


, wobei die Innenstruktur von F_1 und F_2 nicht gezeichnet werden, da die für diese Aufgabe nicht relevant sind.

⇒ Wie man leicht merkt, sind F_1 und F_2 durch Kettenschaltung zu H_1 verschaltet. Deswegen sind die Kettenbeschreibungen $\underline{a}_{F_1}$ und $\underline{a}_{F_2}$ für weitere Berechnungen besonders geeignet. Wenn die Zweitore F_1 und F_2 streng linear sind, kann man die Kettenmatrizen $\underset{\sim}{A}_{F_1}$ und $\underset{\sim}{A}_{F_2}$ bestimmen und einfach mit den rechnen.

b) Nachdem wir in Teilaufgabe a) festgestellt haben, dass wir die Kettenbeschreibungen von F_1 und F_2 brauchen, bleibt hier nur die Kettenbeschreibung oder ggf. die Kettenmatrix von F_1 zu bestimmen. Um dies zu schaffen, sollen wir zunächst den idealen Übertrager, der in F_1 drin ist, uns näher anschauen.

→ idealer Übertrager hat folgendes Symbol und definierende Gleichungen:



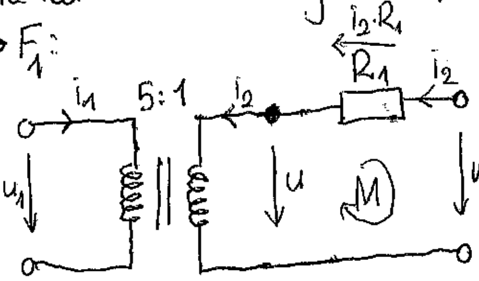
$$u_1 = ü \cdot u_2$$
$$i_1 = -\frac{1}{ü} \cdot i_2$$

, wobei ü der sogenannte Übersetzungsverhältnis ist.

→ Anmerkung: Idealer Übertrager ist die idealisierte Modellierung des realen Transformators, was durch die Kopplung der in den Spulen (≙ Spulensymbol) induzierten Magnetfeldern funktioniert. Die Striche zwischen den Spulen symbolisieren den Eisenkern, der die Magnetfelder verstärkt. Das Übersetzungsverhältnis ü bildet sich aus dem Verhältnis der Windungszahlen beider Spulen.

→ Jetzt soll man mit einem der bekannten Verfahren, nämlich by inspection oder LL/KS-Methode, die Kettenbeschreibung von F_1 bestimmen:

→ F_1:



(das heißt nicht, dass diese Spannung gleich zur u_2 von F_1 ist)

→ Man definiere eine Hilfsgröße u und bestimme sie über KVL bei Masche M:

$$-u - \underbrace{i_2 \cdot R_1}_{\text{Ohmsches Gesetz}} + u_2 = 0 \quad \Rightarrow u = u_2 - i_2 \cdot R_1 \quad (1)$$

→ Jetzt soll man die Gleichungen des idealen Übertragers verwenden, wobei ü = 5 und zweite Spannung (Spannung am Tor 2 des Übertragers) u sind (siehe Schaltung).

$$\Rightarrow \quad u_1 = ü \cdot u = 5 \cdot u \quad (2)$$
$$i_1 = \frac{-1}{5} \cdot i_2 \quad (3)$$

→ Die Gleichung (3) ist schon die zweite Gleichung der Kettenbeschreibung, da sie die zweite gesteuerte Größe i_1 in Abhängigkeit von den steuernden Größen u_2 und $-i_2$ darstellt.

(1) in (2): $u_1 = 5 \cdot u = 5 \cdot u_2 - 5 \cdot i_2 \cdot R_1$ (4)

→ (4) ist die erste Gleichung der Kettenbeschreibung.

⇒ Kettenbeschreibung:

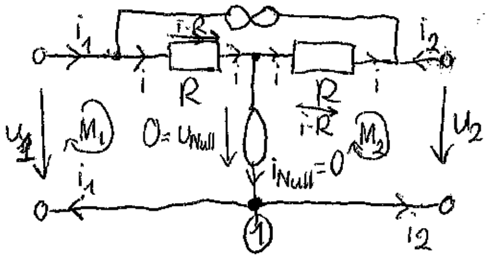
$$u_1 = a_1(u_2, -i_2) = 5 \cdot u_2 + 5R_1(-i_2)$$
$$i_1 = a_2(u_2, -i_2) = \frac{1}{5} \cdot (-i_2)$$

→ Man merkt an dieser Stelle, dass F_1 streng linear ist, da man die Kettenbeschreibung in einer Kettenmatrix zusammenfassen kann, die lautet:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5R_1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{A}_{F_1} = \begin{bmatrix} 5 & 5R_1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

c) Man soll zunächst die inverse Kettenmatrizen von G_1 und G_2 bestimmen, um daraus durch eine geschickte Rechnung die inverse Kettenmatrix von F_2 $\underset{\sim}{A}'_{F_2}$ aufzustellen.

• Zunächst betrachte man G_1:



(wiederum entsprechen u_1 und u_2 nicht die u_1 und u_2 von H_1)

→ Zunächst hat man die Torbedingungen und Eigenschaften des Nullators verwendet, um auf die Gleichung durch KCL am Knoten (1) zu kommen:

$\underbrace{i_{Null}}_{=0} - i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = -i_2 \Leftrightarrow i_2 = 1 \cdot (-i_1)$ (2. Gleichung von inverser Kettenbeschr.)

→ Dann definiere man einen Hilfsstrom i, was wegen Nullator über beide Widerstände fließt.

→ Dann verwende man die Maschen M_1 und M_2:

M_1: $-u_1 + \underset{\text{Ohmsches Gesetz}}{i \cdot R} + \underbrace{u_{Null}}_{=0} = 0 \Rightarrow u_1 = i \cdot R$ $\qquad$ M_2: $-\underbrace{u_{Null}}_{=0} + \underset{\text{Ohmsches Gesetz}}{i \cdot R} + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -i \cdot R$

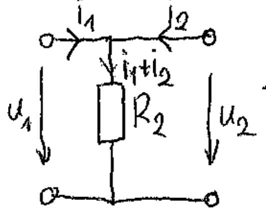
$\Rightarrow u_1 = i \cdot R = -u_2 \Rightarrow u_1 = -u_2 \Leftrightarrow u_2 = -u_1$ (1. Gleichung von inverser Kettenbeschreibung)

$\Rightarrow$ inverse Kettenmatrix von G_1, die in diesem Fall wegen strenger Linearität existiert, lautet:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{A}'_{G_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ Anmerkung: Wenn man diese Beschreibung mit der des Negativ-Immittanz-Konverters (NIK) vergleicht, bemerkt man, dass die genau übereinstimmen für $k=1$ bei NIK. Dieses Zweitor G_1 ist also eine Realisierungsmöglichkeit von NIK mithilfe eines Nullors.

• Jetzt betrachte man G_2:



→ Es gilt über KVL: $u_1 = u_2$ und Ohmsches Gesetz: $u_1 = u_2 = R_2(i_1 + i_2)$

→ Diese Gleichungen muss man umformen, um auf die inverse Kettenmatrix zu kommen:

$u_1 = R_2 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2 \Rightarrow R_2 \cdot i_2 = u_1 - R_2 \cdot i_1 \,\backslash \cdot \frac{1}{R_2} \Rightarrow i_2 = \frac{u_1}{R_2} + 1 \cdot (-i_1)$ (Zweite Glg. von inv. Kettenbesch.) (1)

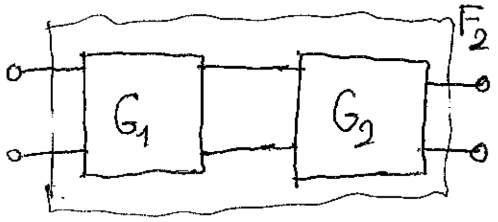
und $u_2 = R_2 \cdot i_1 + R_2 \cdot i_2$ (2)

→ (1) in (2): $u_2 = \cancel{R_2 i_1} + \cancel{R_2} \cdot \frac{u_1}{\cancel{R_2}} + \cancel{R_2 (-i_1)} \Rightarrow u_2 = u_1$ (1. Glg. von inv. Kettenbesch.)

$\Rightarrow$ inverse Kettenmatrix lautet:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{A}'_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Jetzt soll man durch eine geschickte Rechnung auf die inverse Kettenmatrix von F_2 kommen. Dafür betrachten wir die Verschaltung von G_1 und G_2 und charakterisieren die:



$\Rightarrow$ Man merkt wieder, dass G_1 und G_2 kettenverschaltet sind. Da aber nach inverser Kettenmatrix von F_2 gefragt ist, und wir die inversen Kettenmatrizen von G_1 und G_2 wissen, ist die Berechnung über diese geschickter.

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{A}'_{F_2} = \underset{\sim}{A}'_{G_2} \cdot \underset{\sim}{A}'_{G_1}$$

$\rightarrow$ Die Vorschrift der Matrizenmultiplikation für zwei 2x2-Matrizen lautet folgendermaßen:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

, was für Matrizen anderer Dimensionen analog erweitert werden kann (siehe Mathe 1).

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A}'_{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 1 \\ \frac{1}{R_2}\cdot(-1)+1\cdot 0 & \frac{1}{R_2}\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

d) Wie wir schon bestimmt haben, ist die Kettenmatrix von F_2 $\underset{\sim}{A}_{F_2}$ vonnöten um die Kettenmatrix von H_1 zu bestimmen und damit es zu charakterisieren. D.h., dass wir ausgehend von der inversen Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}'_{F_2}$, was wir in Teilaufgabe c) bestimmt haben die Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}_{F_2}$ bestimmen sollen. Die Vorschrift dafür befindet sich in Seite 56 des Skriptums in der fünften Zeile und sechsten Spalte, und lautet:

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{A}'} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Wie man leicht merkt, ist diese Umformung genau dann möglich, wenn $\det \underset{\sim}{A}' \neq 0$ gilt, oder äquivalent $\underset{\sim}{A}'$ invertierbar ist. In unserem Fall lautet $\underset{\sim}{A}'_{F_2}$:

$$\underset{\sim}{A}'_{F_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \underset{\sim}{A}'_{F_2} = (-1)\cdot 1 - \left(\frac{-1}{R_2}\right)\cdot 0 = -1 \neq 0 \checkmark$$

$\rightarrow$ Da die Determinante der inversen Kettenmatrix nicht verschwindet, ist sie invertierbar. Damit ist die obige Umformung möglich und die Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}_{F_2}$ existiert.

→ $\underset{\sim}{A}_{F_2}$ lautet:

$$\underset{\sim}{A}_{F_2} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{A}'_{F_2}} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{R_2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

→ Anmerkung: Diese Vorschrift entspricht genau der Inversebildungsvorschrift aus Musterlösung 4. Jedoch sind hier die Nebendiagonalelemente nicht mit Minus versehen, wegen des negativen Vorzeichens bei der Kettenbeschreibung vor dem steuernden Strom. Es muss ja auch so sein, da die Kettenmatrix die Inverse von der inversen Kettenmatrix ist ($(A^{-1})^{-1} = A$).

e) Nun kann man durch eine einfache Matrizenmultiplikation die oben erwähnte Zweitormatrix, nämlich die Kettenmatrix von H_1 berechnen. Die Vorschrift dazu ist in Seite 2 dieser Musterlösung und lautet:

$$\underset{\sim}{A}_{H_1} = \underset{\sim}{A}_{F_1} \cdot \underset{\sim}{A}_{F_2}$$ (da F_1 und F_2 durch eine Kettenschaltung H_1 bilden)

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A}_{H_1} = \begin{bmatrix} 5 & 5R_1 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+5\cdot\frac{R_1}{R_2} & 5R_1 \\ \frac{1}{5R_2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

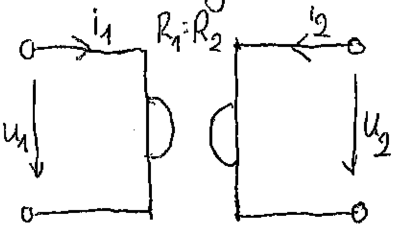
f) Jetzt haben wir die Schaltung H_2 gegeben, deren Torgrößen beim ersten Tor u_3, i_3 und beim zweiten Tor u_4, i_4 heißen. In der Fragestellung ist es gegeben, dass wir i_3, also den Strom des ersten Tors und u_4, also die Spannung des zweiten Tors als steuernde Größen wählen sollen. Diese Wahl der steuernden Größen entspricht genau die bei der Hybridbeschreibung. Wir sollen also die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{H_2}$ bestimmen.

→ Bevor wir mit der Aufstellung von $\underset{\sim}{H}_{H_2}$ mithilfe „by inspection" oder LL/KS-Methode anfangen, ist es sinnvoll, die speziellen Zweitore in H_2, nämlich die gesteuerte Quelle und den Gyrator uns näher anzuschauen:

→ Gesteuerte Quelle: Es gibt vier Arten von gesteuerten Quellen, je nachdem ob der steuernde Zweig Kurzschluss oder Leerlauf ist und gesteuerter Zweig eine abhängige Strom- oder Spannungsquelle ist. Wenn der steuernde Zweig Kurzschluss ist, ist die Quelle stromgesteuert, wenn er Leerlauf ist, dementsprechend spannungsgesteuert. D.h., dass eine Größe des zweiten Tors (≙ gesteuerter Zweig) vollständig von einer Größe des ersten Tors (≙ steuernder Zweig) charakterisiert wird. Mit dieser Eigenschaft, kann man die Zweitormatrizen $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{G}, \underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{H}'$ ganz elegant realisieren, mit den gesteuerten Quellen. Darauf werden wir bei Teilaufgabe i) aufgreifen.

In diesem Fall hat die abhängige Quelle die Größe $u = \mu \cdot u_3$. Bereits aus dieser Größe können wir den Typ dieser gesteuerten Quelle ablesen. Die abhängige Quelle ist eine Spannungsquelle, die von der Spannung u_3 gesteuert wird. Daraus folgt, dass diese Quelle eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle (USU – englisch. VCVS) ist.

→ Gyrator: Gyrator, auch Dualwandler genannt hat folgendes Schaltsymbol und folgende charakterisierende Gleichungen:

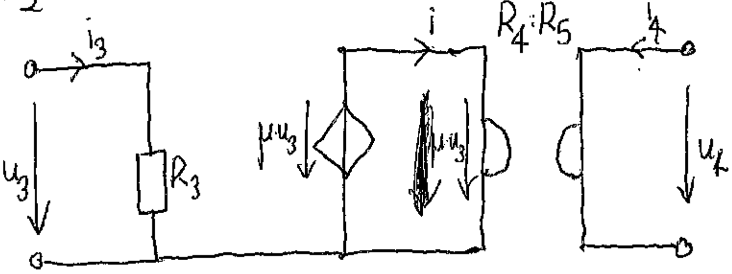


$$u_1 = -i_2 \cdot R_1$$
$$u_2 = i_1 \cdot R_2$$

→ Für $R_1 = R_2 = R_d$ wird ein an zweites Tor beschalteter Eintor zu seinem dualen Eintor gewandelt, woraus der Name Dualwandler stammt.

→ Kommt man richtig zur Teilaufgabe f, soll man zunächst sich H_2 anschauen und die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{H_2}$ herleiten:

→ H_2:



→ Hybridbeschreibung lautet: $\begin{bmatrix} u_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \underline{H} \left(\begin{bmatrix} i_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \right)$

→ Ohmsches Gesetz: $u_3 = R_3 \cdot i_3$ (1) (1. Glg. von Hybridbesch.)

~~Gleichungen~~

→ Gleichungen von Gyrator mit ($u_1 \hat{=} \mu \cdot u_3$, $u_2 \hat{=} u_4$, $i_1 \hat{=} i$, $i_2 \hat{=} i_4$):

$\mu \cdot u_3 = -i_4 \cdot R_4$ (2) $\Rightarrow i_4 = -\frac{\mu}{R_4} \cdot u_3$ (4)

$u_4 = i \cdot R_5$ (3)

→ <u>Anmerkung:</u> (3) besagt an dieser Stelle nichts, also gibt keine Informationen, da wir i nicht charakterisieren können. Also soll man mit (2) arbeiten.

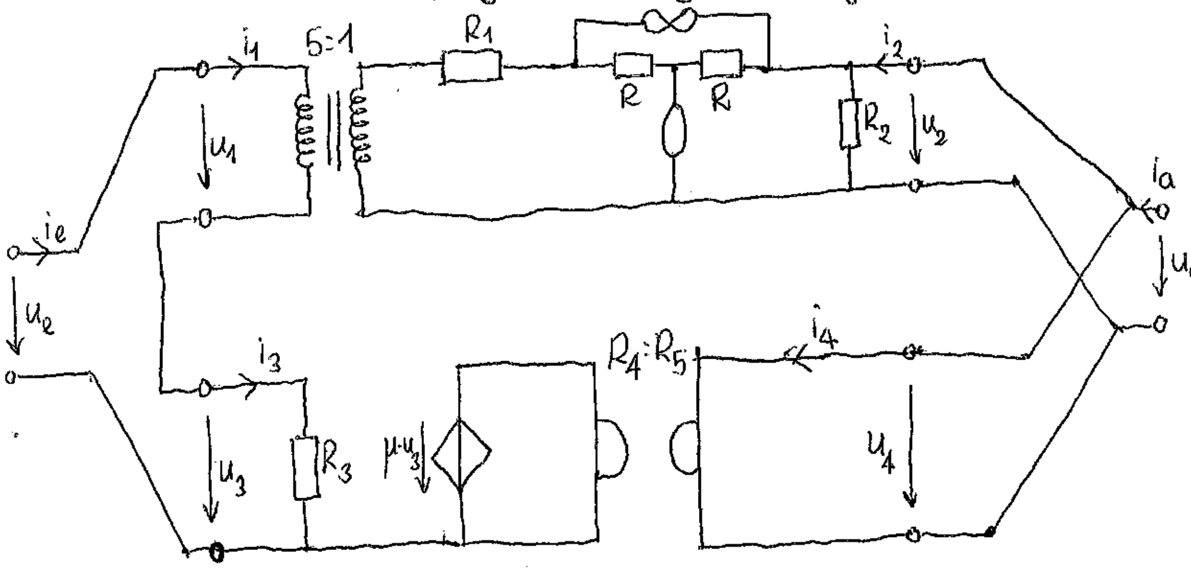
→ (1) in (4): $\Rightarrow i_4 = \frac{-\mu}{R_4} \cdot R_3 \cdot i_3 \Rightarrow i_4 = \frac{-\mu \cdot R_3}{R_4} \cdot i_3$ (2. Glg. von Hybridbesch.)

⇒ Die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{H_2}$ von H_2 lautet:

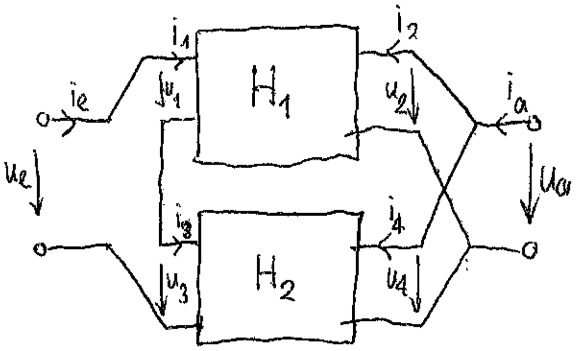
$$\begin{bmatrix} u_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ \frac{-\mu \cdot R_3}{R_4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{H}_{H_2} = \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ \frac{-\mu \cdot R_3}{R_4} & 0 \end{bmatrix}$$

g) In Teilaufgabe f) haben wir die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{H_2}$ von H_2 hergeleitet. Damit diese Matrix für weitere Rechnungen nützlich wird, sollen wir H_1 und H_2 geeignet verschalten. Von dem Namen her ist es offensichtlich, dass wir eine Hybridschaltung konstruieren sollen. Um das Gesamtzweitor direkt durch eine einfache Matrixaddition zu charakterisieren, sollen wir H_1 und H_2 durch Serien-Parallel-Schaltung verschalten. Dann gilt der Zusammenhang gemäß der Information aus Seite 2 dieser Musterlösung: $\underset{\sim}{H}_{ges} = \underset{\sim}{H}_{H_1} + \underset{\sim}{H}_{H_2}$.

→ D.h., wir sollen die ersten Tore von H_1 und H_2 in Reihe und die zweiten Tore parallel verschalten.
→ Die Serien-Parallel-Schaltung (Hybridschaltung) sieht folgendermaßen aus:



oder kompakter:



h) Wir haben in der Teilaufgabe e) bereits die Kettenmatrix von H_1 bestimmt. Jedoch um die Hybridmatrix des gesamten Zweitors gemäß $\underset{\sim}{H}_{ges} = \underset{\sim}{H}_{H_1} + \underset{\sim}{H}_{H_2}$ zu berechnen, brauchen wir die Hybridmatrix von H_1. Die geeignete Umkehrungsvorschrift entnehmen wir ~~dem~~ Seite 56 des Skriptums aus Zeile 3 und Spalte 5 der Tabelle. Die lautet:

$$\underset{\sim}{H} = \frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det \underset{\sim}{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}.$$

→ Die Kettenmatrix $\underset{\sim}{A}_{H_1}$ aus Teilaufgabe e lautet:

$$\underset{\sim}{A}_{H_1} = \begin{bmatrix} -5+5 \cdot \frac{R_1}{R_2} & 5R_1 \\ \frac{1}{5R_2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

, wobei $a_{22} = \frac{1}{5} \neq 0$ gilt und damit die Umrechnung durchführbar ist.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{H}_{H_1} = \frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det \underset{\sim}{A}_{H_1} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 5R_1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{5R_2} \end{bmatrix}$$

NR: $\det \underset{\sim}{A}_{H_1} = \frac{1}{5}\left(-5 + \frac{5R_1}{R_2}\right) - 5R_1 \cdot \frac{1}{5R_2}$

$= -1 + \cancel{\frac{R_1}{R_2}} - \cancel{\frac{R_1}{R_2}} = -1$

$$= 5 \begin{bmatrix} 5R_1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{5R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25R_1 & -5 \\ -5 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

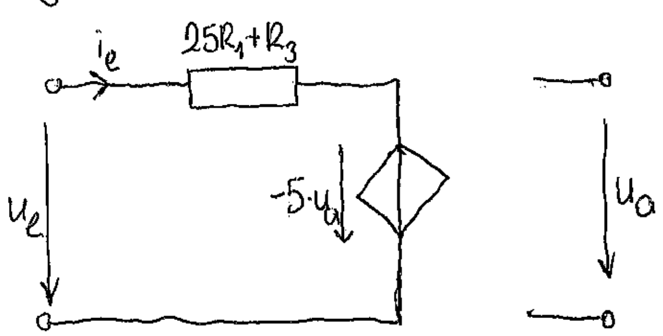
→ Die Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{ges}$ des gesamten Zweitor lautet dann:

$$\underset{\sim}{H}_{ges} = \underset{\sim}{H}_{H_1} + \underset{\sim}{H}_{H_2} = \begin{bmatrix} 25R_1 & -5 \\ -5 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ \frac{-\mu \cdot R_3}{R_4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25R_1 + R_3 & -5 \\ -5 - \frac{\mu \cdot R_3}{R_4} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

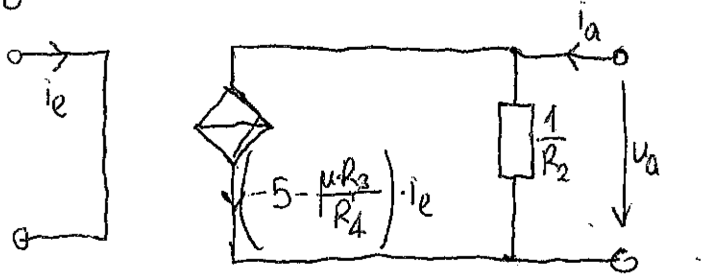
i) Wir sollen schließlich eine Schaltung aufbauen, die der Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}_{ges}$ gehorcht, also diese Matrix realisiert. Die Schaltung aus Teilaufgabe g) ist so eine, aber jetzt sollen wir ein Ersatzschaltbild dieser Schaltung zeichnen, das nur zwei gesteuerte Quellen und sonst nur Widerstände, bzw. Leitwerte beinhaltet. Unser Ausgangspunkt dafür ist die Matrix $\underset{\sim}{H}_{ges}$. Um besser zu sehen, wie dieses Ersatzschaltbild aufgebaut wird, schreiben wir die Gleichungen der Hybridbeschreibung auf:

$$\begin{bmatrix} u_e \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25R_1 + R_3 & -5 \\ -5 - \frac{\mu \cdot R_3}{R_4} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_e \\ u_a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} u_e &= (25R_1 + R_3) \cdot i_e + (-5) \cdot u_a \quad (1) \\ i_a &= \left(-5 - \frac{\mu \cdot R_3}{R_4}\right) \cdot i_e + \frac{1}{R_2} \cdot u_a \quad (2) \end{aligned}$$

→ Man kann sich die Gleichung (1) nun so vorstellen: u_e ist die Summe zweier Terme, nämlich $(25R_1+R_3) \cdot i_e$ und $-5 \cdot u_a$, die beide Spannungen sind. Der erste Term ist einfach ein Ohmsches Gesetz für einen Strom i_e, der über den Widerstand $25R_1+R_3$ fließt. Der zweite Term ist eine Spannung, die durch die Spannung u_a gesteuert wird, also kann man diesen Term mit einer USU realisieren. Zwei Spannungen addieren sich bei der Serienschaltung, deswegen ist die erste Gleichung durch folgende Schaltung zu realisieren:



→ Gleichung (2) ist dann analog so vorzustellen: i_a ist die Summe zweier Ströme, nämlich von $\left(-5-\frac{\mu\cdot R_3}{R_4}\right)\cdot i_e$ und von $\frac{1}{R_2}\cdot u_a$. Den ersten Strom kann man mit einer ISI realisieren, da er von dem Strom i_e gesteuert ist. Zweiter Strom gehorcht wiederum das Ohmsche Gesetz für diesmal einen Leitwert $\frac{1}{R_2}$, der die Spannungsabfall u_a erfährt. Zwei Ströme addieren sich bei einer Parallelschaltung, deswegen lässt Gleichung (2) sich folgendermaßen realisieren:



→ Das Ersatzschaltbild der gesamten Schaltung sieht also folgendermaßen auf: