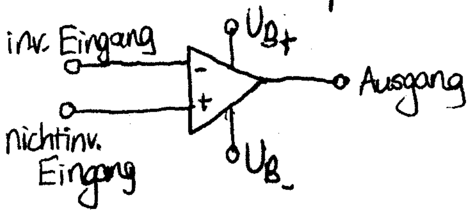
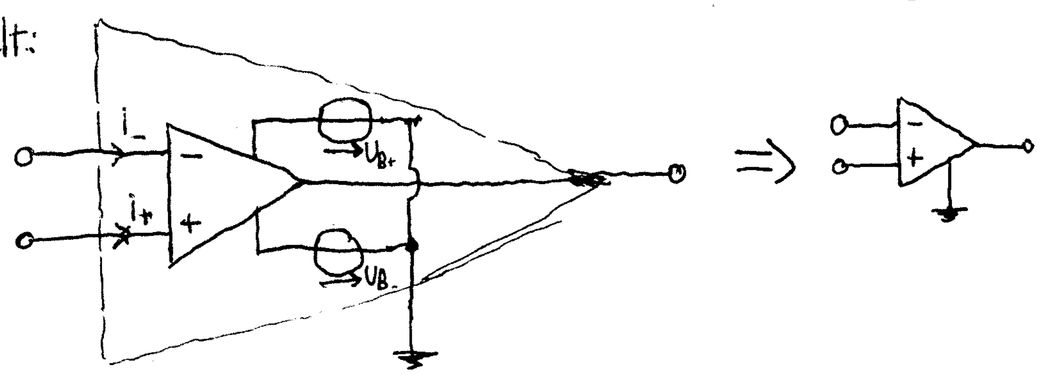
MUSTERLÖSUNG – Übungsblatt 9

A1) Operationsverstärker [redacted] bilden eine von den wichtigsten Bauelementeklassen. Obwohl die nach dem II. Weltkrieg zunächst für die Lösung der Differentialgleichungen bei Analogrechnern eingesetzt wurden, sind die Operationsverstärker heutzutage für ganz viele, verschiedenste Anwendungen eingesetzt. Wie der Name schon verrät, sind diese Bauteile für Verstärkung der Signale in einer Schaltung, in verschiedensten Art und Weisen, je nachdem wie sie geschaltet werden, fähig. Diese Verstärkungseigenschaft beruht auf für uns schon bekannte Transistoren, die, wie wir schon diskutiert haben, Signale verstärken können.
Ein Operationsverstärker, kann also mithilfe Bipolartransistoren oder auch MOSFET realisiert werden. Diese beiden Realisierungen kann man im Skript finden. Mithilfe dieser ganz flexiblen Anwendungsmöglichkeiten kann man die Schaltungen aus vorherigen Kapiteln, die damals als abstrakte Modelle aufgefasst werden, realisieren.
Im Rahmen dieses Übungsblatts geht es auch um solche Realisierungen. Um die Aufgaben [redacted] leichter bearbeiten zu können, sollen an dieser Stelle einige Vorüberlegungen gemacht werden.
In der Vorlesung „Schaltungstechnik 1" werden überall ideale Operationsverstärker verwendet, die durch idealisierte Modellierung der realen Op-Amps (Abkürzung von operational amplifier) zustande kommt. Der reale Op-Amp ist in gröbster Anschauung ein 5-Pol mit einem invertierenden, einem nicht invertierenden Eingang, die mit – und + gekennzeichnet werden, einem Ausgang, und zwei Anschlüssen für Betriebsspannungen:

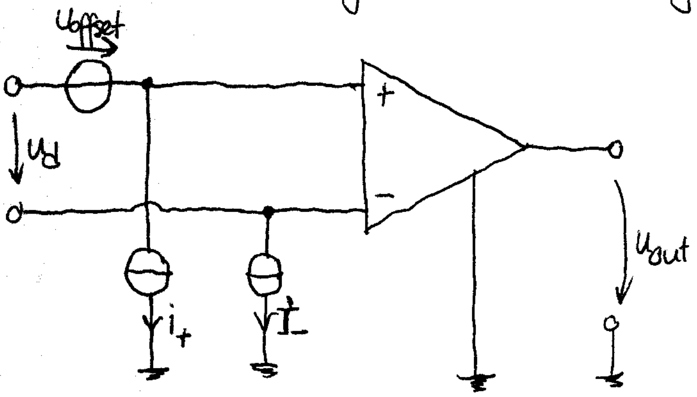


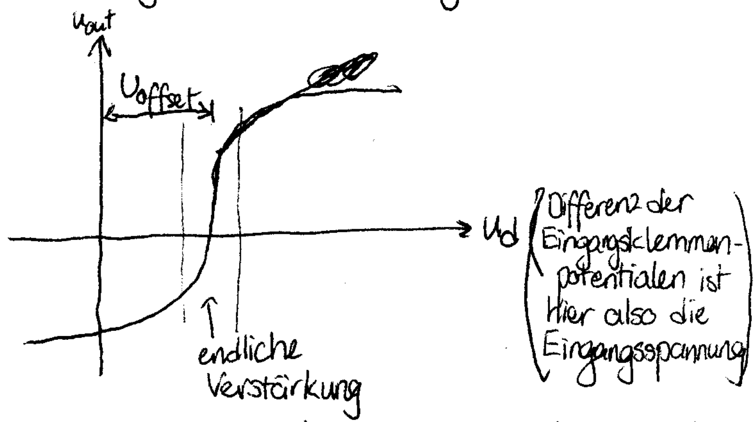
Jedoch kann man diese als ein Zweitor auffassen, indem man die Betriebsspannungsquellen ins Innere des Bauteils zieht und nur eine Verbindung für die Erhaltung der Torbedingungen stellt:



Obwohl wir jetzt gewährleistet haben, dass unser Op-Amp ein Vierpol ist, haben wir immer noch Imperfektionen durch die Potentiale der Eingangsklemmen, die [redacted] eine sogenannte Offset haben können, was in der Übertragungskennlinie zu merken ist.
Außerdem soll man die sogenannte Eingangsruheströme i_- und i_+ auch beseitigen, damit die Torbedingung am Eingang erfüllt werden kann und man den Op-Amp als Zweitor auffassen kann.
Dafür kann man die Offsetspannung des Eingangs mit einer Spannungsquelle und den Offsetstrom mit jeweils einer Stromquelle berücksichtigen, der wegen Eingangsruheströme entsteht.

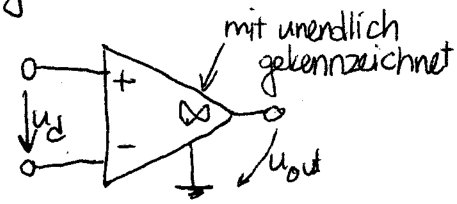
Dadurch kommt man auf das folgende Beschaltung von realem Op-Amp, wobei die Imperfektionen, die auch in der unten rechts liegenden realen Übertragungskennlinie angedeutet sind, beseitigt werden:



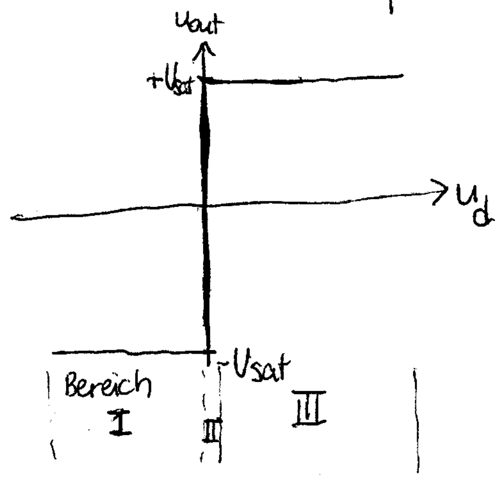


Die rechte Übertragungskennlinie wird damit zum Ursprung verschoben und der Arbeitspunkt des OpAmps befindet sich im Ursprung. Außerdem vernachlässigt man den sehr kleinen Eingangsleitwert und den sehr kleinen Ausgangswiderstand, wodurch der ideale Operationsverstärker mit unendlicher Verstärkung erreicht wird:

Schaltsymbol:



Übertragungskennlinie:



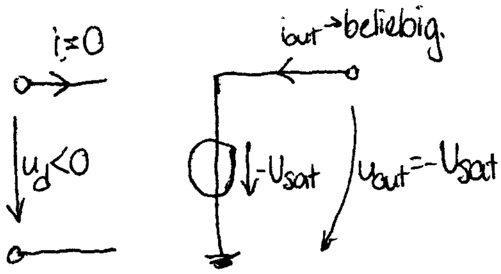
Jetzt ist es sinnvoll, die stückweise lineare Übertragungskennlinie mithilfe der Unterscheidung angedeuteter Bereiche weiter zu charakterisieren und die Ersatzschaltbilder für diese Bereiche herleiten.

- Bereich I) heißt auch „negative Sättigung", da die Ausgangsspannung für beliebig kleine Eingangsspannung u_d auf der negativen Sättigungsspannung $-U_{sat}$ gesättigt wird. Also gilt für diesen Arbeitsbereich die Voraussetzung $u_d<0$, außerdem gilt offenkundig $u_{out}=-U_{sat}$. Da wir schon den Eingangsleitwert vernachlässigt haben, ist der Eingangsstrom gleich zu Null, was die Modellierung des Eingangs als Leerlauf erlaubt. Da der Ausgangswiderstand auch sehr klein ist, ist der Ausgangsstrom beliebig groß, was die Modellierung des Ausgangs als unabhängige Spannungsquelle gestattet. Daraus ergibt sich das folgende ESB für negative Sättigung:

<u>negative Sättigung:</u>

$\underline{u_d<0}$, $u_{out}=-U_{sat}$ $\rightarrow$ ESB:

$i=0$, $i_{out}\rightarrow$ beliebig

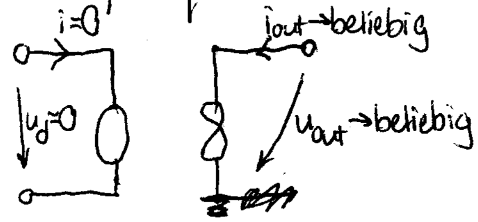


• Bereich II) heißt der „(streng) lineare Bereich". Man bekommt für diesen Arbeitsbereich keine Ankunft, bis auf $u_d=0$ und $|u_{out}| \leq U_{sat}$. Aber mit Hilfe der Überlegungen von oben, die natürlich für alle Bereiche gelten, kann man auch ein Ersatzschaltbild für linearen Bereich einführen. Also ist der Eingangsstrom wieder Null ($i=0$), was zusammen mit $u_d=0$, die Modellierung des Eingangs mit einem Nullator zulässt. Die Ausgangsspannung ist zwar nicht unbegrenzt, aber ist sehr hohe Spannungen $u_{out} \gg U_{sat}$, bzw. sehr kleine Spannungen $u_{out} \ll -U_{sat}$ zu erreichen, unrealistisch und in der Praxis eher unwahrscheinlich. Deswegen kann man die Ausgangsspannung im linearen Bereich als beliebig annehmen. Außerdem ist der Ausgangsstrom auch beliebig groß, was die Modellierung des Ausgangs durch einen Norator zulässt. Also ist das geeignete ESB des Op-Amps im linearen Bereich ein Nullor:

<u>linearer Bereich:</u>

$\underline{u_d=0}$, $u_{out} \rightarrow$ beliebig

$i=0$, $i_{out} \rightarrow$ beliebig $\longrightarrow$ ESB:

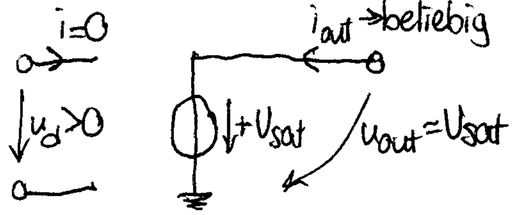


• Bereich III) heißt auch „positive Sättigung". Offensichtlich ist die Voraussetzung für diesen Arbeitsbereich $u_d>0$ und es gilt $u_{out}=U_{sat}$. Außerdem ist wieder $i=0$ und i_{out} beliebig. Deswegen kann man den Eingang mit einem Leerlauf und Ausgang mit einer Spannungsquelle modellieren, was das folgende ESB ergibt:

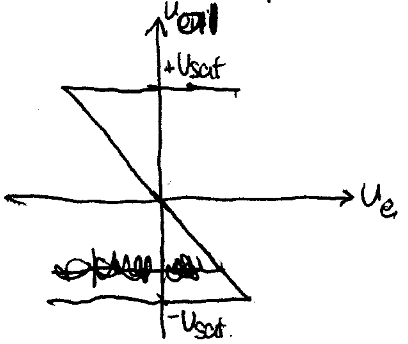
<u>positive Sättigung:</u>

$\underline{u_d>0}$, $u_{out}=+U_{sat}$

$i=0$, $i_{out} \rightarrow$ beliebig. $\longrightarrow$ ESB:

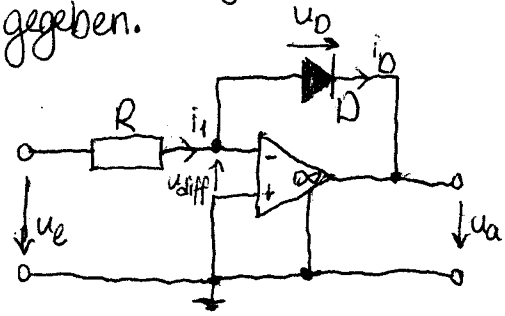


→ <u>Anmerkung</u>: Wenn der Op-Amp mit anderen Bauelementen verschaltet und dann die Übertragungskennlinie der gesamten Schaltung gezeichnet wird, kann sie natürlich anders aussehen als die des Op-Amps. Beispielsweise bedeutet so eine Übertragungskennlinie nicht, das der Op-Amp nicht ideal ist, da sie sich auf die gesamte Schaltung bezieht:



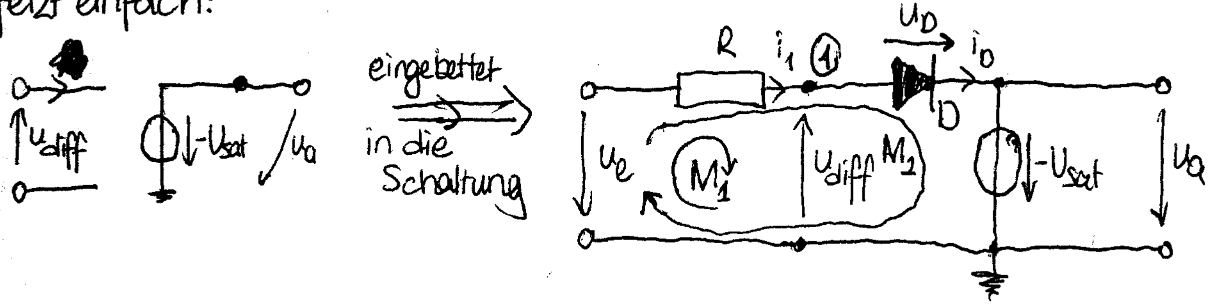
a) In Aufgabe 1 wird die folgende Schaltung bestehend aus einem Widerstand, einem Op-Amp und einer pn-Diode gegeben.

→~~Anmerkung~~



→Anmerkung: In dieser Aufgabe wird zur Notation der Differenzspannung nicht die übliche u_d sondern u_{diff} verwendet, da u_D und i_D sich auf die pn-Diode beziehen.

Es ist angegeben, dass der Op-Amp in negativer Sättigung ist, und ~~wird~~ erfordert, dass wir das geeignete ESB für diesen Arbeitsbereich zeichnen. Mit unserer Vorüberlegung ist es jetzt einfach:



b) In der Angabe steht außerdem, dass $R, I_S, U_{sat}, U_T > 0$ als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Diese Aufgabe fragt also nach einer Beschreibung von u_a in Abhängigkeit obiger Größen, was sich durch einen Blick auf das ESB aus vorheriger Aufgabe ergibt:

$u_a = -U_{sat}$.

c) Die Bedingung für u_{diff} in negativer Sättigung können wir auch ganz einfach unserer Vorüberlegung entnehmen:

$u_{diff} < 0\,V$.

d) Nun sollen wir u_{diff} in Abhängigkeit von i_1 und u_e angeben, was ~~man~~ man durch Auswertung der Masche M_1 (siehe ESB) wieder einfach schaffen kann:

• KVL bei M_1: $-u_{diff} - u_e + i_1 \cdot R = 0$, wobei das Ohmsche Gesetz auf Widerstand R verwendet wurde.

$\Rightarrow u_{diff} = i_1 \cdot R - u_e$

e) Es ist erfordert, dass wir u_{diff} in Abhängigkeit von i_1 und bekannten Größen angeben, was wir durch Elimination von u_e aus obiger Gleichung erreichen. Diese Elimination kriegen wir hin, indem wir die Masche M_2 auswerten:

• KVL bei M_2: $-u_e + i_1 R + u_D - U_{sat} = 0 \iff u_e = i_1 R + u_D - U_{sat}$

⇒ Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung aus Teilaufgabe d) ein:

$u_{diff} = \cancel{i_1 R} - \cancel{i_1 R} - u_D + U_{sat} = U_{sat} - u_D$

Jetzt haben wir u_D in unserem Ausdruck, was aber nicht erlaubt ist. u_D können wir eliminieren, indem wir die ~~[illegible]~~ Bauelementegleichung für pn-Diode der Angabe entnehmen und nach u_D auflösen:

• $i_D = I_S \cdot \exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) \Leftrightarrow \frac{i_D}{I_S} = \exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) \;\Big\backslash \ln(\cdot) \Rightarrow \frac{u_D}{U_T} = \ln\left(\frac{i_D}{I_S}\right) \Leftrightarrow u_D = U_T \cdot \ln\left(\frac{i_D}{I_S}\right)$

→ Setzt man diesen Ausdruck nun ein:

$$u_{diff} = U_{sat} - u_D = U_{sat} - U_T \cdot \ln\left(\frac{i_D}{I_S}\right)$$

→ Obwohl wir immer noch eine nicht erlaubte Größe, nämlich i_D in obiger Darstellung haben, können wir die direkt eliminieren, indem wir durch KCL am Knoten (1) (siehe ESB) feststellen:

$$i_1 = i_D$$

$$\Rightarrow \underline{u_{diff} = U_{sat} - U_T \cdot \ln\left(\frac{i_1}{I_S}\right)}$$

Damit haben wir u_{diff} in Abhängigkeit von i_1 und bekannten Größen dargestellt.

f) Man hat in der Praxis fast nie Zugang zu allen Klemmen der Schaltung, aber zu dem Eingang und Ausgang. Deswegen ist es zweckmäßig die Bedingung für negative Sättigung im Falle dieser Schaltung, nicht über u_{diff} sondern über die Eingangsspannung u_e zu definieren. Das ist genau in dieser Aufgabe erfordert, dass wir die Ungleichung für u_e in Abhängigkeit der bekannten Größen aufstellen. Dafür betrachten wir zunächst unsere Ergebnisse aus Teilaufgabe c) und d):

• $\Rightarrow u_{diff} < 0 \xrightarrow[\text{setzen}]{\text{gleich-}} i_1 R - u_e < 0 \Rightarrow u_e > i_1 R$

$\quad \Rightarrow u_{diff} = i_1 R - u_e$

Damit haben wir eine Ungleichung für u_e bestimmt, was aber immer noch von dem unbekannten Strom i_1 abhängt. Dazu nutzen wir unser Ergebnis aus Teilaufgabe e), indem wir diesen Ausdruck nach i_1 auflösen und in die Ungleichung, die wir gerade bestimmt haben, einsetzen.:

$$u_{diff} = U_{sat} - U_T \ln\left(\frac{i_1}{I_S}\right) \Leftrightarrow U_T \ln\left(\frac{i_1}{I_S}\right) = U_{sat} - u_{diff} \;\Big\backslash \cdot \frac{1}{U_T} \Rightarrow \ln\left(\frac{i_1}{I_S}\right) = \frac{U_{sat} - u_{diff}}{U_T} \;\Big\backslash \exp(\cdot)$$

$$\Rightarrow \frac{i_1}{I_S} = \exp\left(\frac{U_{sat} - u_{diff}}{U_T}\right) \;\Big\backslash \cdot I_S \Rightarrow i_1 = I_S \cdot \exp\left(\frac{U_{sat} - u_{diff}}{U_T}\right)$$

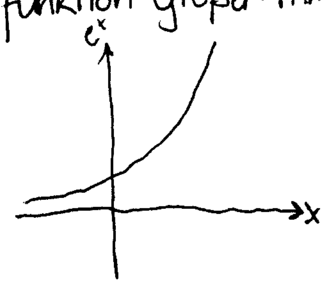
$$\Rightarrow u_e > R \cdot I_S \exp\left(\frac{U_{sat} - u_{diff}}{U_T}\right)$$

→ Obwohl wir u_{diff} immer noch drin haben, wissen wir aus Teilaufgabe c):

$$u_{diff} < 0 \Rightarrow -u_{diff} > 0 \Rightarrow U_{sat} - u_{diff} > U_{sat}$$

Da U_{sat} und U_T größer als 0 gemäß Angabe sind und da die Exponentialfunktion größer mit größer werdendem Argument wird, gilt es:

Kennlinie von e^x



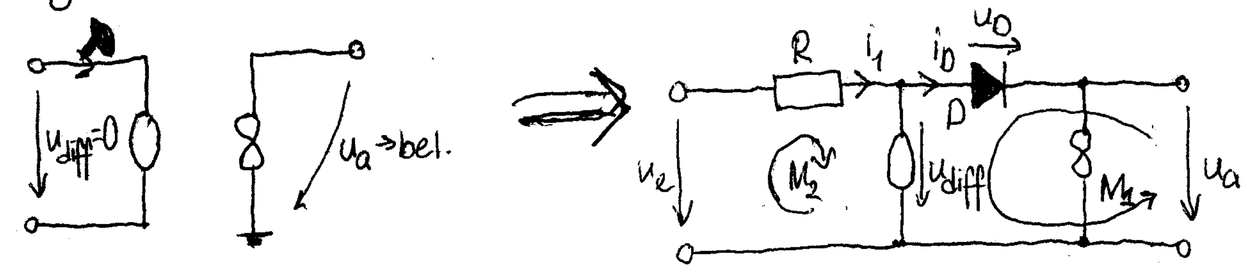
$$u_e > R \cdot I_S \cdot \exp\left(\frac{U_{sat} - u_{diff}}{U_T}\right) > R \cdot I_S \cdot \exp\left(\frac{U_{sat}}{U_T}\right)$$

Damit haben wir die Ungleichung für u_e in Abhängigkeit von bekannten Größen gefunden:

$$u_e > R \cdot I_S \cdot \exp\left(\frac{U_{sat}}{U_T}\right)$$

→ Anmerkung: Diese Teilaufgabe ist mathematisch ein bisschen zu schwer, deswegen es aber auch unwahrscheinlicher ist, dass so eine Aufgabe in der Prüfung kommt. Also lässt euch davon bitte nicht abschrecken!

g) Jetzt sollen wir die lineare Analyse der Schaltung durchführen. Das heißt, dass der Op-Amp im linearen Bereich ist. In dieser Teilaufgabe wird erfordert, dass wir das geeignete ESB der Schaltung zeichnen. Laut unserer Vorüberlegungen ist das ESB von Op-Amp ein Nullor im linearen Bereich. Zeichnet man dieses in die Schaltung ein, kommt auf die folgende Antwort dieser Teilaufgabe:



Außerdem merkt man an dieser Stelle wieder direkt $i_1 = i_D$ und $u_{diff} = 0$.

h) Um u_D in Abhängigkeit von u_a anzugeben, kann man die Masche M_1 auswerten:

• KVL bei M_1: $-u_a - u_D + \underbrace{u_{diff}}_{=0} = 0 \Rightarrow u_D = -u_a$

i) Bei der Bestimmung von u_a in Abhängigkeit von u_e ist es zunächst sinnvoll, u_e in Abhängigkeit von i_1 anhand der Masche M_2 zu bestimmen, da $i_1 = i_D$ gilt und wir die Zusammenhänge zwischen i_D und u_D aus der Angabe, u_D und u_a aus Teilaufgabe h) kennen.

• KVL bei M_2: $-u_e + \underbrace{i_1 \cdot R}_{\text{Ohm. Gesetz}} + \underbrace{u_{diff}}_{=0} = 0 \Rightarrow u_e = i_1 \cdot R \xRightarrow{i_1 = i_D} u_e = i_D \cdot R$

→ Setzt man $i_D = I_S \cdot \exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right)$ in den obigen Ausdruck ein:

$$\Rightarrow u_e = I_S \cdot \exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) \cdot R \xRightarrow{u_D = -u_a} u_e = I_S \cdot \exp\left(\frac{-u_a}{U_T}\right) \cdot R$$

→ Löst man diesen Ausdruck nach u_a aus kommt man auf die gesuchte Darstellung:

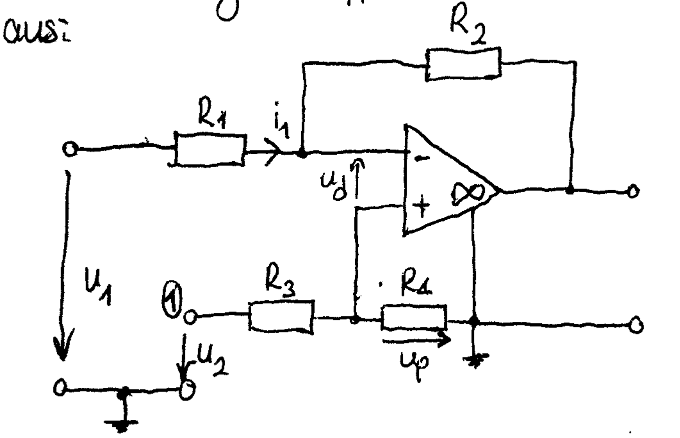
$$u_e = R \cdot I_S \cdot \exp\left(\frac{-u_a}{U_T}\right) \Leftrightarrow \frac{u_e}{R \cdot I_S} = \exp\left(\frac{-u_a}{U_T}\right) \Big\backslash \ln(\cdot) \Rightarrow \frac{-u_a}{U_T} = \ln\left(\frac{u_e}{R \cdot I_S}\right) \Big\backslash \cdot(-U_T)$$

$$\Rightarrow u_a = -U_T \cdot \ln\left(\frac{u_e}{R \cdot I_S}\right)$$

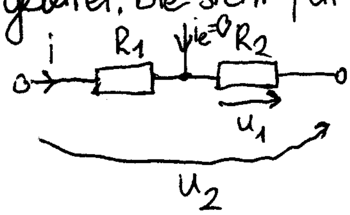
j) Wie man aus dem obigen Ausdruck ablesen kann, wird die Eingangsspannung außer einigen Multiplikationen, bzw. Divisionen mit Konstanten, logarithmiert.

Deswegen ist diese Schaltung ein <u>Logarithmierer</u>.

A2) In dieser Aufgabe haben wir eine andere Operationsverstärkerschaltung, die wir analysieren sollen. Dabei gelten offensichtlich alle Vorüberlegungen immer noch. Die Schaltung sieht folgendermaßen aus:



a) Am Anfang der Aufgabe wird gemäß der Angabe vorausgesetzt, dass der Op-Amp in positiver Sättigung betrieben wird. Deswegen gelten alle unsere Vorüberlegungen über diesen Arbeitsbereich. Unter anderem ist hier die Eigenschaft $i=0$, d.h. der Eingangsstrom von Op-Amp gleich zu Null ist, von Bedeutung, da wir die Spannungsteilerformel wegen des Fehlens dieses Eingangsstroms verwenden dürfen. Die Spannungsteilerformel haben wir beim Übungsblatt 1 hergeleitet. Die sieht für folgende Schaltung so aus:



$$\Rightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

Herleitung: Strom über Widerstände ist gleich, da der Eingangsstrom gleich zu Null ist.

$\Rightarrow u_1 = i \cdot R_2$ (Ohmsches Gesetz)

$u_2 = i \cdot R_1 + i \cdot R_2$ (Ohmsches Gesetz) $\Rightarrow i(R_1+R_2) = u_2 \Rightarrow i = \frac{u_2}{R_1+R_2}$

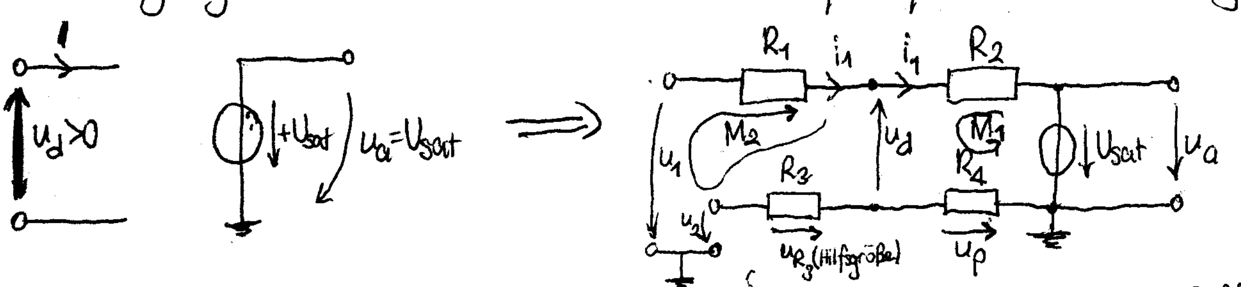
$\Rightarrow u_1 = u_2 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$

Da i_e, Eingangsstrom, wie oben angedeutet gleich zu Null ist, kann man die Spannungsteilerformel einfach mit $u_1 = u_p$ und $u_2 = u_2$ (aus Schaltung abzulesen) anwenden. Man soll dabei natürlich merken können, dass u_2 in der Schaltung zwischen Knoten ① und Masse liegt, und da alle Masseanschlüsse gleiche Potential haben, die Rolle von u_2 in der Spannungsteilerformel spielt.

$$\Rightarrow u_p = u_2 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4}$$

(Diese Gleichung kann man wie oben durch Ausnutzung der Gleichheit der Ströme über R_3 und R_4 mithilfe Ohmschen Gesetzen herleiten.)

b) Um das geeignete ESB der Schaltung für positive Sättigung zu zeichnen, greifen wir unsere Vorüberlegungen an und betten das ESB des Op-Amps in die Schaltung ein:



→Anmerkung: In dieser Aufgabe ist wieder die übliche Notation u_d für die Differenzspannung zu nutzen.

c) Man erreicht den gesuchten Ausdruck für u_d in Abhängigkeit von u_p, U_{sat}, i_1, R_2 ganz einfach, wenn man die geeignete Masche findet, die in diesem Fall M_1 ist, und diese auswertet:

• KVL bei M_1: $-u_d+u_p-U_{sat}-\underbrace{i_1 R_2}_{\text{Ohmsches Gesetz}}=0 \Rightarrow u_d=u_p-U_{sat}-i_1R_2$

d) Um u_d in Abhängigkeit von u_p, u_1, i_1, R_1 anzugeben, zeichnet sich die Masche M_2 aus. Wertet man diese Masche aus:

• KVL bei M_2: $-u_d-u_{R_3}+u_2-u_1+\underbrace{i_1 R_1}_{\text{Ohmsches Gesetz}}=0 \Rightarrow u_d=-u_{R_3}+u_2-u_1+i_1R_1$

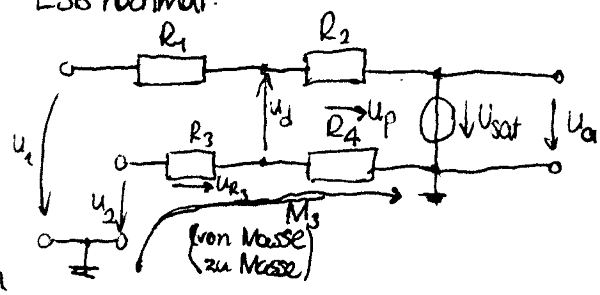
Um die Hilfsgröße u_{R_3}, die den Spannungsabfall über R_3 darstellt, zu eliminieren, betrachten wir die Masche M_3:

• KVL bei M_3: $-u_2+u_{R_3}+u_p=0$

$\Rightarrow u_{R_3}=u_2-u_p$

→ Setzt man diese Beziehung in die obige ein, eliminiert sich zusätzlich u_2 und wir bekommen den Ausdruck, den wir suchen:

ESB nochmal:



$\Rightarrow u_d=u_p-\cancel{u_2}+\cancel{u_2}-u_1+i_1R_1=u_p-u_1+i_1R_1$

e) Nachdem es gegeben wird, dass alle Widerstände gleich sind, ist es sinnvoll den Zusammenhang $R_1=R_2=R_3=R_4$ in unsere bisherige Antworten einzusetzen:

$u_p=u_2\cdot\frac{R_4}{R_3+R_4}=u_2\cdot\frac{R}{R+R}=u_2\cdot\frac{\cancel{R}}{2\cancel{R}}=\frac{u_2}{2}$, $u_d=u_p-U_{sat}-i_1\cdot R$, $u_d=u_p-u_1+i_1\cdot R$

Nun sollen wir die Bedingung für $u_F=u_1-u_2$, darunter der Op-Amp sich in positiver Sättigung befindet, in Abhängigkeit von U_{sat} angeben. Um überhaupt auf eine Ungleichung zu kommen, nutzen wir unsere Vorüberlegung über die Voraussetzung für u_d in positiver Sättigung. Es muss also gelten: $u_d>0$. Nun haben wir zwei Ausdrücke für u_d, die U_{sat}, u_p, i_1, R und u_1 beinhalten. u_1 ist ein Teil von u_F und darf in der Ungleichung bleiben. u_p ist zwar nicht erlaubt, aber wir kennen die Beziehung $u_p=\frac{u_2}{2}$ und u_2 ist auch ein Teil von u_F, deswegen darf u_p auch enthalten bleiben. U_{sat} darf laut Angabe auch vorkommen, aber i_1 und R dagegen nicht. Um diese zu eliminieren, verwendet man einen Trick. Da die nur in dem Term i_1R vorkommen und dieser einmal positiv und einmal negativ vorkommt, addiert man die beiden Ausdrücke:

$$\begin{array}{rl} & u_d=u_p-U_{sat}-i_1\cdot R \\ + & u_d=u_p-u_1+i_1R \\ \hline & 2u_d=2u_p-U_{sat}-u_1-\cancel{i_1R}+\cancel{i_1R} \Rightarrow 2u_d=2u_p-U_{sat}-u_1 \end{array}$$

Setzt man in diesen Ausdruck $u_p = \frac{u_2}{2}$ ein:

$$2u_d = 2 \cdot \frac{u_2}{2} - u_1 - U_{sat} \Rightarrow 2u_d = \underbrace{u_2 - u_1}_{=-u_F} - U_{sat} \Rightarrow 2u_d = -u_F - U_{sat} \,\Big|\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{u_F + U_{sat}}{2} = u_d > 0$$

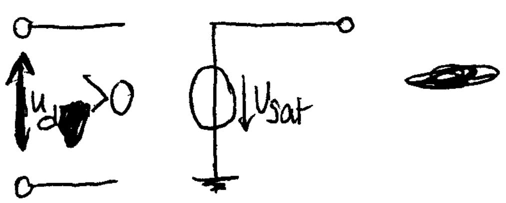
positive Sättigung

$$\Rightarrow -\frac{u_F + U_{sat}}{2} > 0 \,\Big|\cdot 2 \Rightarrow -u_F - U_{sat} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_F < -U_{sat}}}.$$

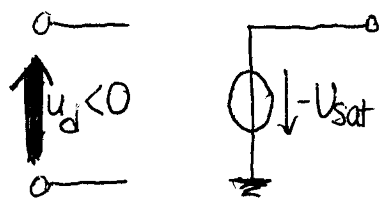
Damit haben wir die Bedingung für positive Sättigung gefunden.

f) Jetzt sollen wir die Bedingung von u_F für negative Sättigung bestimmen. Befindet man sich in negativer Sättigung anstelle positiver Sättigung, ändert sich in der Schaltung nichts bis auf die Spannungsquelle im ESB des Op-Amps. Die wird nun den Wert $+U_{sat}$ statt $-U_{sat}$ haben. Diese Überlegung entspricht genau dem Hinweis, was gegeben wird. Außerdem wird sich die Bedingung von u_d auch ändern. Es wird nicht mehr $u_d > 0$ wie in positiver Sättigung, sondern $u_d < 0$ gelten:

ESB in positiver Sättigung:



ESB in negativer Sättigung



Nachdem wir die obigen Feststellungen gemacht haben, führen wir im Prinzip es nochmal auf. Die Gleichungen nach neuen Feststellungen lauten:

$$u_d < 0, \quad u_p = \frac{u_2}{2}, \quad u_d = u_p + U_{sat} - i_1 R, \quad u_d = u_p - u_1 + i_1 R$$

diesmal plus

Führen wir den gleichen Trick durch:

$$\begin{aligned} & u_d = u_p + U_{sat} - i_1 \cdot R \\ + \; & u_d = u_p - u_1 + i_1 \cdot R \\ \hline & 2u_d = 2u_p + U_{sat} - u_1 \end{aligned} \Rightarrow 2u_d = \cancel{2} \cdot \frac{u_2}{\cancel{2}} + U_{sat} - u_1 \Rightarrow 2u_d = \underbrace{u_2 - u_1}_{=-u_F} + U_{sat} \Rightarrow u_d = \frac{-u_F + U_{sat}}{2} < 0$$

diesmal kleiner Null

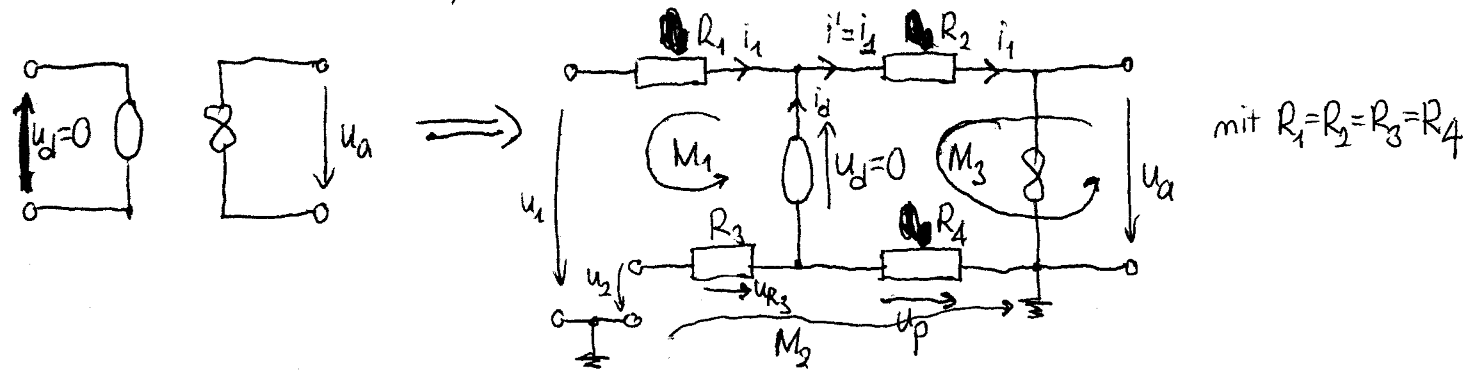
$$\Rightarrow U_{sat} - u_F < 0 \Rightarrow \underline{\underline{u_F > U_{sat}}}$$

Damit haben wir die Bedingung von u_F in negativer Sättigung gestellt.

An dieser Stelle schauen wir auch die Werte von u_a in beiden Sättigungsbereichen zusätzlich an, die für weitere Aufgaben nützlich sein werden. Man kann in der Schaltung oder auch im ESB der positiven Sättigung merken, dass die Ausgangsspannung der Schaltung äquivalent zu der Ausgangsspannung von Op-Amp ist. Da die Ausgangsspannung von Op-Amp für positive Sättigung U_{sat} und für negative $-U_{sat}$ ist, gilt es:

$$u_a = U_{sat} \text{ (pos. Sät.)} \quad ; \quad u_a = -U_{sat} \text{ (neg. Sät.)}$$

g) Jetzt sollen wir die lineare Analyse der Schaltung durchführen, was heißt, dass der Op-Amp sich im streng linearen Bereich befindet. Dafür zeichnen wir wie immer, zunächst das ESB dieses Arbeitsbereichs, nämlich Nullor-Modell:



Man kann an dieser Stelle entweder mit Hilfe der Vorüberlegungen oder da u_d über ein Nullator abfällt, feststellen, dass $u_d=0$ gilt.

h) Um i_1 in Abhängigkeit von u_1, u_p und R_1 anzugeben eignet sich die Masche M_1, wobei wir uns wieder die Hilfsgröße u_{R_3} definieren.

• KVL bei M_1: $-\underbrace{i_1 \cdot R_1}_{\text{Ohmsc. Gesetz}} + u_1 - u_2 + u_{R_3} + \underbrace{u_d}_{=0} = 0 \Rightarrow i_1 \cdot R_1 = u_1 - u_2 + u_{R_3} \Rightarrow i_1 = \frac{u_1 - u_2 + u_{R_3}}{R_1}$ (1)

Man kann u_{R_3} wieder durch Auswertung der Masche M_2 eliminieren:

• KVL bei M_2: $-u_2 + u_{R_3} + u_p = 0 \Rightarrow u_{R_3} = u_2 - u_p$ (2)

$$\xRightarrow{(2)\text{ in }(1)} i_1 = \frac{u_1 - \cancel{u_2} + \cancel{u_2} - u_p}{R_1} = \frac{u_1 - u_p}{R_1}$$

i) Um i_1 in Abhängigkeit von u_p, u_a und R_2 anzugeben eignet sich diesmal die Masche M_3, wobei wegen KCL bei ① gilt:

• KCL: $i_1 + \underbrace{i_d}_{=0} = i' \Rightarrow i' = i_1$

• KVL bei M_3: $-\underbrace{i_1 R_2}_{\text{Ohmsc. Gesetz}} - \underbrace{u_d}_{=0} + u_p - u_a = 0 \Rightarrow i_1 R_2 = u_p - u_a \Rightarrow i_1 = \frac{u_p - u_a}{R_2}$

J) Da die Gleichheit der Widerstände immer noch gilt, kann man die Beziehung $u_p = \frac{u_2}{2}$ immer noch nutzen. Außerdem können die Ergebnisse bisheriger Aufgaben wieder umgeschrieben werden:

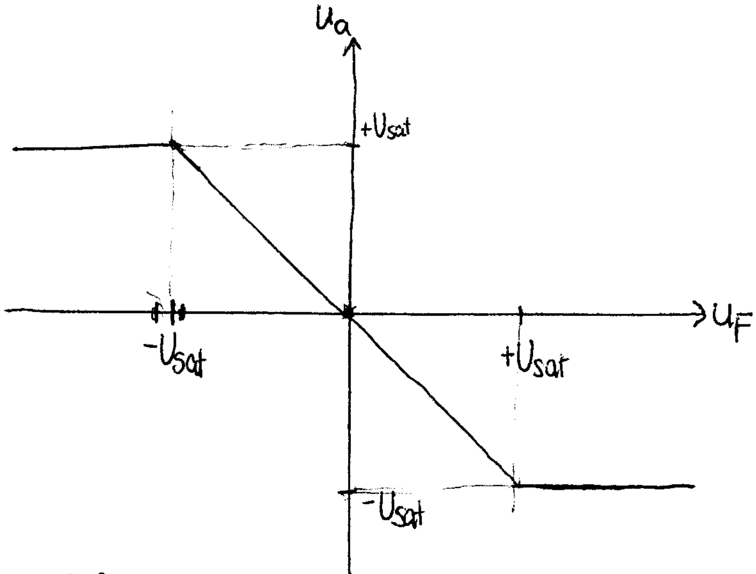
$i_1 = \frac{u_1 - u_p}{R}$, $i_1 = \frac{u_p - u_a}{R}$

Man merke an dieser Stelle, dass u_p einmal negativ und einmal positiv vorkommt. Da wir u_a in Abhängigkeit von u_F darstellen sollen, ist es nicht hilfreich die Gleichungen aufzuaddieren. Sondern brauchen wir $2u_p = u_2$ um u_F zu erzeugen. Deswegen setzen wir die Gleichungen gleich:

$$\frac{u_1 - u_p}{R} = \frac{u_p - u_a}{R} \Big\backslash \cdot R \Rightarrow u_1 - u_p = u_p - u_a \Rightarrow u_1 - 2 \cdot u_p = -u_a \Rightarrow u_1 - 2 \cdot \frac{u_2}{2} = -u_a \Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{u_F} = -u_a$$

$$\Rightarrow \boxed{u_a = -u_F}$$

k) In den Teilaufgaben e) und f) haben wir festgestellt, dass für positive Sättigung: $u_F < -U_{sat}$ und $u_a = U_{sat}$, für negative Sättigung $u_F > U_{sat}$ und $u_a = -U_{sat}$ gelten. Da der lineare Bereich zwischen den beiden Sättigungen liegt, lautet seine Bedingung zwangsläufig $|u_F| < U_{sat}$, d.h. $-U_{sat} < u_F < U_{sat}$. Außerdem haben wir in Teilaufgabe j) die Ausgangsspannung im linearen Bereich bestimmt, als $u_a = -u_F$. Das ist offensichtlich eine Ursprungsgerade in u_F-u_a-Ebene mit der Steigung -1. Außerdem ist die Übertragungskennlinie stetig, da in Bereichgrenzen für $u_F = -U_{sat}$, $u_a = U_{sat}$ und für $u_F = U_{sat}$, $u_a = -U_{sat}$ gilt. Dadurch ergibt sich die stückweise lineare Übertragungskennlinie, die sich folgendermaßen aufschreiben und zeichnen lässt:



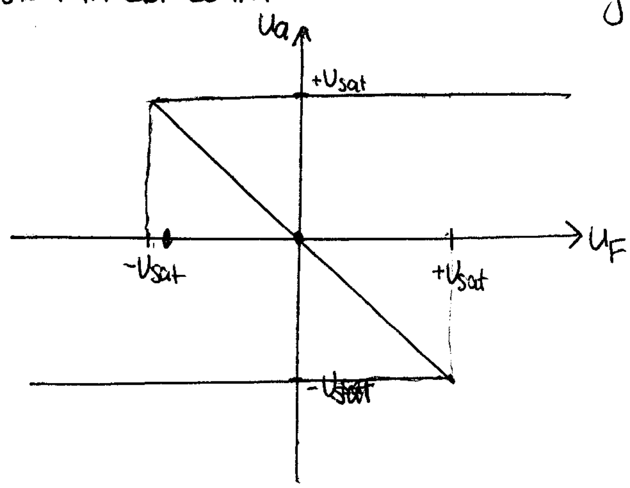
(I) neg. Sät.: $u_F > U_{sat}$, $u_a = -U_{sat}$

(II) lin. Bereich: $|u_F| < U_{sat}$, $u_a = -u_F$

(III) pos. Sät.: $u_F < -U_{sat}$, $u_a = U_{sat}$

l) Die Ausgangsspannung ist die negative der Differenz $u_F = u_1 - u_2$, deswegen ist diese Schaltung ein Subtrahierer.

m) Wie man sich leicht überzeugen kann, würden sich bei verkehrter Polung des Op-Amps die Richtung der Ungleichungen für die beiden Sättigungen umdrehen, da im ESB beider Sättigungen nur die Richtung von u_d sich ändert. Wenn die Richtung von u_d sich ändert, würde dann bezüglich der alten Ungleichungen diesmal $-u_d > 0$ in positiver Sättigung und $-u_d < 0$ in negativer Sättigung gelten. Deswegen drehen sich die Ungleichungen in beiden Sättigungen um, und es ergibt sich $u_F < U_{sat}$ für negative Sättigung und $u_F > -U_{sat}$ für positive Sättigung. Im linearen Bereich ändert sich gar nichts, da bei verkehrter Polung der Eingang von Op-Amp, der diesmal mit einem Nullator modelliert wird, umkehrt. Da aber Nullator ein ungepoltes Bauelement ist, ändert sich in der Kennlinie nichts. Daraus ergibt sich die verkehrte Übertragungskennlinie:



(I) neg. Sät.: $u_F < U_{sat}$, $u_a = -U_{sat}$

(II) lin. Bereich: $|u_F| < U_{sat}$, $u_a = -u_F$

(III) pos. Sät.: $u_F > -U_{sat}$, $u_a = U_{sat}$

→ Anmerkung: Setzt man bei verkehrter Polung des Op-Amps die Eingangsspannung auf eine Wert im Intervall $-U_{sat} < u_F < U_{sat}$, so gibt es immer 3 Möglichkeiten für die Ausgangsspannung u_a. Man kann außerdem zeigen, dass für ein u_F zwischen beiden Sättigungsspannungen, u_a entweder $+U_{sat}$ oder $-U_{sat}$ beträgt, aber nie den Wert im linearen Bereich, da die Lösungen in den Sättigungen stabil und die im linearen Bereich instabil ist. Die Konzept der stabilen und instabilen Lösungen lernt man in Schaltungstechnik 2. Also kann man bei verkehrter Polung den Op-Amp gar nicht im linearen Bereich betreiben und als Subtrahierer verwenden!