Kapitel 8 - Allgemeine Analyseverfahren

→ Systematische Methoden um Ströme und Spannungen (unbekannt) mithilfe der bekannten Verbindungsstruktur und Bauelementegleichungen, symbolisch (per Hand) oder numerisch (rechnergestützt) zu bestimmen.

→ 2 Schritte:

1) Beschreibung der Verbindungsstruktur (Zeichnen eines Digraphs, siehe Kap. 2)
2) Charakterisierung der Netzwerkelemente (Bauelementegleichungen)

→ Verbindungsmehrtor: Beschrieben durch den Digraph, also nur Drähte aber keine Bauelemente.

Eigenschaften: • Anzahl der Tore = Anzahl der Zweige
- zeitinvariant
- streng linear
- verlustlos (Beweis im Skript)
- reziprok

→ Kernbeschreibung des Verbindungmehrtors lautet: $\underset{\sim}{M} = [\underset{\sim}{B}' \ \underset{\sim}{0}]$, $\underset{\sim}{N} = [\underset{\sim}{0} \ \underset{\sim}{A}']$ ← Knoteninzidenzmatrix (siehe auch Kap. 2)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}' & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

→ enthält alle KVL und KCL-Gleichungen, Spalten, bzw. Zeilen sind also linear abhängig.

→ Tellegenscher Satz: Bildbeschreibung lautet:

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}'^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{B}'^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{c}_u \\ \underline{c}_i \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{c}_u \\ \underline{c}_i \end{bmatrix}$$

⇒ Satz besagt: $\boxed{\underset{\sim}{U}^T \cdot \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{0}}$

- Wenn zwei Schaltungen gleiche geometrische Gestalt (Topologie) besitzen, also mit gleichem Digraph beschrieben werden können, dann sind ihre Verbindungsmehrtore völlig äquivalent zueinander, unabhängig davon, wie die beschaltet werden.
- Hier wird mit Hilfe KCL und KVL der Tellegensche Satz hergeleitet. Das kann man aber auch anders machen. D.h. es reichen 2 von dieser drei Gesetze um eine Schaltung völlig zu beschreiben. Das dritte kann mit den anderen beiden hergeleitet werden. Diese drei Gesetze sind:

1) KCL
2) KVL
3) Tellegenscher Satz

→ Systematisches Aufstellen der Kirchhoffschen Gleichungen

- Um die n-1 linear unabhängige Knotengleichungen (KCL) und b-(n-1) linear unabhängige Schleifengleichungen (KVL) zu bestimmen.

1) <u>Baumkonzept</u>: Geeignete Verteilung des Digraphs (siehe AuD) und systematisches Aufstellen der KCL und KVL Gleichungen anschließend.
2) <u>Knotenspannungsanalyse</u>: Einführung zusätzlicher Knotenspannungen zwischen jeder Knoten und Masse, dann Aufstellen der Gleichungen dieses größeren Mehrtors mit mehreren Unbekannten, wird aber im Folgenden reduziert werden.
3) <u>Maschenstromanalyse</u>: Dual zu Knotenspannungsanalyse, Einführung zusätzlicher Maschenströme.

Für ausführliche Erklärung siehe bitte Skript!

→ Tableaugleichungen

- alle Gleichungen, d.h. sowohl die des Verbindungsmehrtors als auch die der Bauelemente, in Matrix-Vektor-Schreibweise. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist der Arbeitspunkt des Verbindungsmehrtors und Kennlinien der Bauelemente gleichzeitig.

⇒ Tableaugleichungen einer Schaltung:

$$\begin{array}{l} \text{Verbindungsmehrtor} \begin{cases} \text{KVL} \\ \text{KCL} \end{cases} \\ \text{Bauelemente} \end{array} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \Big\} \text{Erregungsvektor } (\hat{=} \text{unabhängige Quellen})$$

2b-Gleichungen

→ Bei Knotenspannungsanalyse führt man die Knotenspannungen zunächst ein:

⇒ Knotentableau lautet:

Einheitsmatrix ↙ ↙ Knotenspannungen

$$\begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}^T & \underset{\sim}{I}_b & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \qquad 2b+(n-1) \text{ Gleichungen}$$

→ Für duales Maschentableau, siehe Skript.

* Reduzierte Knotenspannungsanalyse * (wichtig, klausurrelevant)

→ Um das Gleichungssystem im Knotentableau zu reduzieren, ~~sollen alle~~ sollen alle Elemente spannungsgesteuert sein.

⇒ Schritte (Wenn alle Elemente spannungsgesteuert sind).

- Stromquellen und Parallelleitwerte zu einer Kante des Verbindungsmehrtors zusammenfassen.
- Knotentableau aufstellen:

$$\begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}^T & \underset{\sim}{I}_b & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$

- Zeile 3 nach $\underline{i}$ auflösen:

$$\underset{\sim}{M}\cdot\underline{u}+\underset{\sim}{N}\cdot\underline{i}=\underline{e} \Leftrightarrow \underset{\sim}{N}\cdot\underline{i}=-\underset{\sim}{M}\cdot\underline{u}+\underline{e} \Rightarrow \underline{i}=\underbrace{-\underset{\sim}{N}^{-1}\cdot\underset{\sim}{M}}_{\underset{\sim}{Y}}\cdot\underline{u}+\underbrace{\underset{\sim}{N}^{-1}\cdot\underline{e}}_{\underline{i}_0}$$

$$\Rightarrow \underline{i}=\underset{\sim}{Y}\cdot\underline{u}+\underline{i}_0, \text{ mit } \underset{\sim}{Y} := \text{Kantenleitwertsmatrix}, \quad \underline{i}_0 := \text{Kanten-Stromquellenvektor}$$

→ $\underset{\sim}{N}$ ist invertierbar, da alle Elemente spannungsgesteuert sind.

- $\underline{u}$ mithilfe Zeile 1 eliminieren:

$$\underline{u}=\underset{\sim}{A}^T\cdot\underline{u}_k \Rightarrow \underline{i}=\underset{\sim}{Y}\cdot\underset{\sim}{A}^T\cdot\underline{u}_k+\underline{i}_0$$

- Einsetzen in Zeile 2:

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underline{i}=\underline{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Y}\cdot\underset{\sim}{A}^T\cdot\underline{u}_k+\underset{\sim}{A}\cdot\underline{i}_0=\underline{0} \Leftrightarrow \underbrace{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Y}\cdot\underset{\sim}{A}^T}_{\underset{\sim}{Y}_k}\cdot\underline{u}_k=\underbrace{-\underset{\sim}{A}\cdot\underline{i}_0}_{\underline{i}_q} \Rightarrow \underset{\sim}{Y}_k\cdot\underline{u}_k=\underline{i}_q$$

mit $\underset{\sim}{Y}_k$:= Knotenleitwertsmatrix, $\underline{i}_q$:= Knoten-Stromquellenvektor

→ So leitet man die übliche Bezeichnung $\underset{\sim}{Y}_k\cdot\underline{u}_k=\underline{i}_q$ her, wobei $\underset{\sim}{Y}_k$ und $\underline{i}_q$ mit folgendem Vorgehen by inspection zu bestimmen sind. Wenn nicht alle Elemente spannungsgesteuert sind, kann man mit gewissen Tricks dieses gewährleisten. Die folgen nun auch.

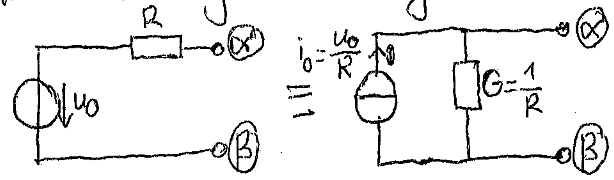
→ Aufstellen von $\underset{\sim}{Y}_k$ und $\underline{i}_q$ by inspection:

1) Methoden um nicht spannungsgesteuerte Elemente in solche umzuwandeln.

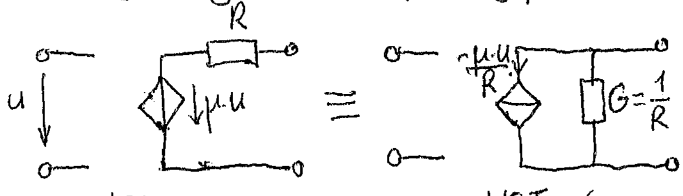
1.1) Quellenumwandlung:

Spannungsgesteuerte Elemente: Stromquellen, USI, Leitwerte. Diese lassen sich direkt in $\underset{\sim}{Y}_k$ bzw. $\underline{i}_q$ eintragen.

→ Tritt eine unabhängige Spannungsquelle in Reihe mit einem Widerstand auf, so kann man durch Quellenwandlung diese stromgesteuerte Elemente in spannungsgesteuerte umwandeln:



→ Analog bei gesteuerter Spannungsquelle

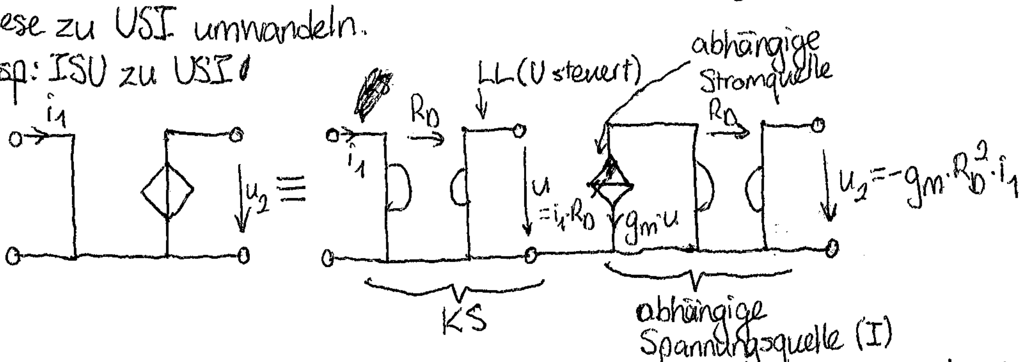


USU USI ✓

1.2) Dualwandlung (Gyrator):

→ USU, ISU, ISI lassen sich nicht direkt in $\underset{\sim}{Y}_k$ eintragen. Aber durch Dualwandlung mit Gyratoren kann man diese zu USI umwandeln.

Bsp: ISU zu USI



→ Gyrator ist durch Parallelschaltung zweier USI realisierbar und ist damit einfach in $\underset{\sim}{Y}_k$ einzutragen.

→ Idealer Übertrager ist durch Parallelschaltung zweier Gyratoren realisierbar.

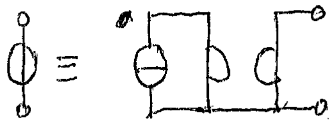
→ Operationsverstärker sind mit geeignetem ESB in jeweiligem Bereich zu ersetzen. Einbau eines Nullors in $\underset{\sim}{Y}_k$ folgt.

→ Transistoren sind analog mit ESB zu ersetzen.

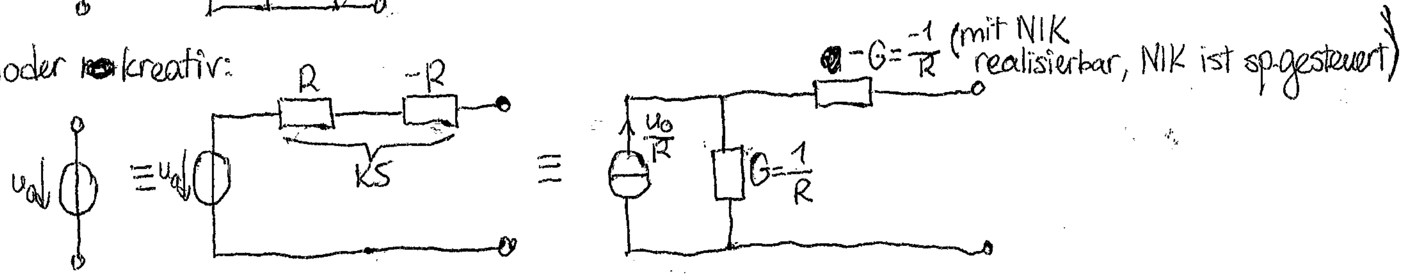
Tipp: In den Klausuren kommen eigentlich Op-Amps nur im streng linearen Bereich (in Knotenspannungsanalyseaufgaben) vor, Transistoren habe ich bisher in solchen Aufgaben nie gesehen. Also verwendet man in solchen Aufgaben nur Nullor-ESB des Op-Amps.

1.3) Spannungsquelle ohne Widerstand in Serie:

a) entweder mit Gyrator:



b) oder kreativ:

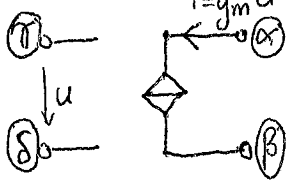


→ Einbau der Elemente von $\underset{\sim}{Y}_k$ (zunächst ohne Nullor zu berücksichtigen)

• Leitwert:

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array} \begin{bmatrix} +G & -G \\ -G & +G \end{bmatrix}$$
$$\alpha \cdots \beta$$

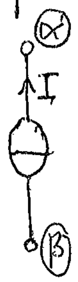
• USI



$$\begin{array}{c} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array} \begin{bmatrix} +g_m & -g_m \\ -g_m & +g_m \end{bmatrix}$$
$$\gamma \cdots \delta$$

→ Einbau der Elemente von $\underline{i}_q$:

• Stromquellen:



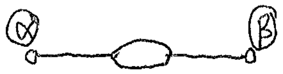
$$\left.\begin{array}{cc} +I & \alpha \\ & \vdots \\ -I & \beta \end{array}\right.$$

→ Vorzeichen sind hier andersrum, da wir auf der anderen Seite der Gleichung sind.

$\underset{\sim}{Y}_k \cdot \underline{u}_k = \underline{i}_q$

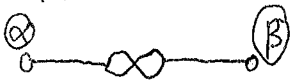
→ Nulloreinbau: Bei Y_k:

• Nullator:



⇒ Spalte α+β in Spalte α eintragen
Spalte β streichen und $u_{k\beta}$ in $\underline{u}_k$ (β-te Zeile von u_k) streichen

• Norator:



⇒ Zeile α+β in Zeile α eintragen
Zeile β der Y_k und $\underline{i}_k$ streichen.

→ Masse: Wegstreichen

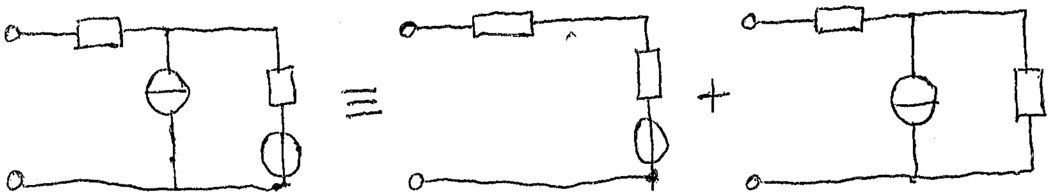
Kapitel 9 - Netzwerkeigenschaften

• Eigenschaften linearer Netzwerke

→ Superpositionsprinzip:

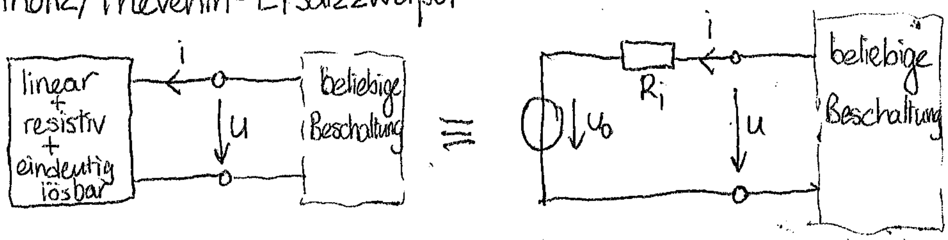
Eine Schaltung sei linear und eindeutig lösbar. Ferner gebe es mehrere Erregungen (unabhängige Quellen). Dann ist das Verhalten dieser gesamten Schaltung äquivalent zur Summe der Reaktionen der Schaltungen, wobei jeweils nur eine Erregung vorhanden ist. Die anderen Erregungen werden jeweils zu Null gesetzt.

Bsp:

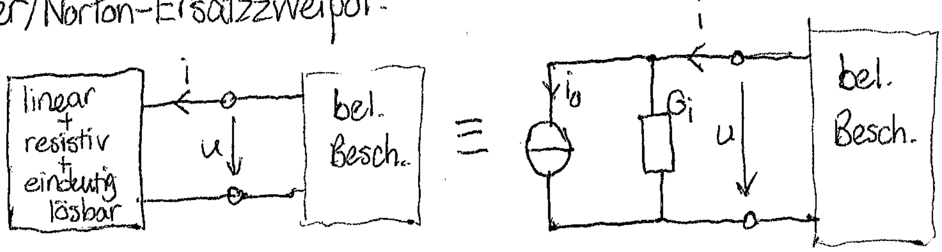


→ Zweipolersatzschaltungen:

1) Helmholtz/Thévenin-Ersatzzweipol:



2) Mayer/Norton-Ersatzzweipol:



• Passivität: Ein Ein- oder Mehrtor, das im Inneren nur passive Elemente hat, ist als Ganzes auch passiv!