Kapitel 4 - Resistive Zweitore

- 4-Pol $\neq$ Zweitor (im Allgemeinen) $\rightarrow$ auf Torbedingungen achten
- 4 Betriebsgrößen: u_1, u_2, i_1, i_2
- Kennfläche (in 4D)
- Beschreibungsformen:

1) Implizit:

$\rightarrow$ Nullstellenmenge, nicht eindeutig

$f_1(u_1, u_2, i_1, i_2) = 0$
$f_2(u_1, u_2, i_1, i_2) = 0$ oder $\underline{f}(\underline{u}, \underline{i}) = \underline{0}$

2) Parametrisch:

$\rightarrow$ Diesmal ein Parametervektor $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\rightarrow \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{c}) \\ \underline{i}(\underline{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(c_1, c_2) \\ u_2(c_1, c_2) \\ i_1(c_1, c_2) \\ i_2(c_1, c_2) \end{bmatrix} \Rightarrow$ alle Betriebsgrößen in Abhängigkeit von Parameter darstellen

3) Explizit:

$\rightarrow$ 6 Formen, existieren nicht immer alle.

$\rightarrow$ Leitwertsbeschreibung: $\underline{i} = \underline{g}(\underline{u})$, Widerstandsbeschreibung: $\underline{u} = \underline{r}(\underline{i})$, Hybridbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{h}\left(\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$, inverse Hybridbesc.: $\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{h}'\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}\right)$, Kettenbeschreibung: $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underline{a}\left(\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}\right)$, inverse Kettenbesch.: $\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underline{a}'\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix}\right)$

$\rightarrow$ Bei Kettenbeschreibung auf Vorzeichen achten.

$\rightarrow$ Für <u>streng</u> lineare Zweitore geht man den Zweitormatrizen über.

- Bedingung für strenge Linearität ist wie bei Eintoren.
- <u>Lineare Zweitore:</u>
- Kernbeschreibung:

$\rightarrow$ Kern einer Matrix = Nullraum $\Rightarrow [\underset{\sim}{M} \;\; \underset{\sim}{N}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0}$

(siehe auch Mathe)

$[\underset{\sim}{M} \;\; \underset{\sim}{N}] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & n_{11} & n_{12} \\ m_{21} & m_{22} & n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$: Implizit

- Bildbeschreibung:

$\rightarrow$ Bildraum $\hat{=}$ Lösungen (siehe auch Mathe)

$\rightarrow$ Betriebsmatrix: $\begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} \\ i_1^{(1)} & i_1^{(2)} \\ i_2^{(1)} & i_2^{(2)} \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ zwei linear unabhängige Messvektoren $\Rightarrow \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \cdot \underline{c}, \; \underline{c} \in \mathbb{R}^2$

Parametrisch

nicht eindeutig (existieren immer bei linearen)

$\rightarrow$ mit Hilfe der Bildbeschreibung kann man falls existent die $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{G}$, usw. Matrizen bestimmen.

<u>Bsp:</u>

$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \cdot \underset{\sim}{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \cdot \underset{\sim}{I}^{-1} \\ \underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{I}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{R} \\ \underset{\sim}{1} \end{bmatrix}$ (falls $\underset{\sim}{I}$ invertierbar ist)

$\rightarrow$ mit einer ~~[illegible]~~ Linksmultiplikation kann man dieses Verfahren auch bei einer Kernbeschreibung verwenden.

• Zweitormatrizen:

→ $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{G}, \underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{H}', \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}'$

→ Bei Kettenmatrizen auf negatives Vorzeichen achten.

→ falls existiert, eindeutig

→ Im quellenfreien Fall:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underset{\sim}{R} \cdot \underline{i}$$

→ Aufstellen der Matrizen durch 2 Methoden:

1) „by Inspection": also durch scharfes Hinschauen und mit Hilfe linearer Algebra

2) KS/LL-Methode:

Bsp: Für Leitwertsmatrix zuerst u_1 auf Null setzen, also Tor 1 mit einem Kurzschluss ersetzen und i_1, i_2 in Abhängigkeit von u_2 berechnen, dann u_2 auf Null setzen usw.

• Eigenschaften resistiver Zweitore

1) Verlustlosigkeit:

→ $\underline{u}^T \cdot \underline{i} = [u_1 \; u_2] \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0$ (allgemein)

→ $\underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{I}^T \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0}$ (streng linear)

2) Passiv/Aktiv:

→ $\underline{u}^T \cdot \underline{i} \geq 0 \Leftrightarrow$ passiv, $\underline{u}^T \cdot \underline{i} > 0 \Leftrightarrow$ strikt passiv $\forall \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \in F$

→ $\underline{u}^T \cdot \underline{i} < 0 \Leftrightarrow$ aktiv, $\exists \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \in F$

3) Zeitvarianz: Kennfläche abhängig von der Zeit

4) Dualität:

→ $f^d\left(\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} R_d \cdot \underline{i} \\ \frac{\underline{u}}{R_d} \end{bmatrix}\right)$

→ streng linear $\Rightarrow \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U} \\ \underset{\sim}{I} \end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix} R_d \underset{\sim}{I} \\ \frac{1}{R_d} \cdot \underset{\sim}{U} \end{bmatrix}$

5) Umkehrbar (Symmetrisch):

→ Vertauschung beider Tore ändert nichts

→ Beidseitige Multiplikation mit der Permutationsmatrix $\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ der $\underset{\sim}{G}$ oder $\underset{\sim}{R}$-Matrizen ändert ihre Struktur nicht. = $\underset{\sim}{G}$ und $\underset{\sim}{R}$ ändern sich bei Zeilen- und Spaltentausch nicht.

→ Die Umkehrbarkeit bemerkt man besonders gut bei der Struktur.

→ Es gilt: $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}'$.

6) Reziprozität (Übertragungssymmetrie):

*Besonderheit: Alle Zweitore, die nur aus Widerstände und Übertrager (Kapazität und Induktivität) bestehen sind reziprok!

→ Es gilt: $\underset{\sim}{G}$ und $\underset{\sim}{R}$-Matrizen sind symmetrisch. $\Rightarrow \underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{G}^T, \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}^T$

$\det \underset{\sim}{A} = \det \underset{\sim}{A}' = 1$

→ $\underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{I}^T \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0}$