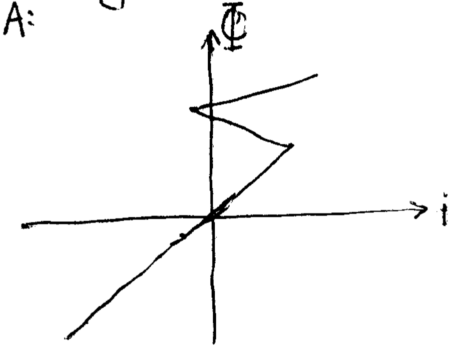
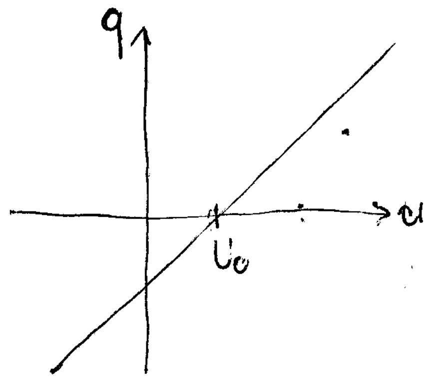
MUSTERLÖSUNG – Übungsblatt 1

A1) Im Rahmen dieser Aufgabe sollen einige allgemeine Eigenschaften reaktiver Eintore anhand beider folgenden Kennlinien diskutiert werden.

A:



B:

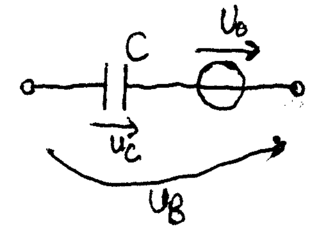


a) Diese Kennlinien sollen nach ihren Eigenschaften untersucht werden.

- Verlustfreiheit: In ST1 galt für verlustfreie resistive Eintore $p=u\cdot i=0$. Jedoch sind die Kennlinien reaktiver Eintore, mit den wir uns in ST2 beschäftigen nicht in u-i-Ebene darstellbar, sondern in u-q, bzw. i-Φ-Ebenen. Für diese Kennlinien gilt nach derselben Gleichung $p=u\cdot i$:
$\Rightarrow p=u\cdot\frac{dq}{dt}\overset{!}{=}0$, bzw. $p=i\cdot\frac{d\Phi}{dt}=0$.
Verlustfreiheit ist bei reaktiven Eintoren immer dann gegeben, wenn beim periodischen Verlauf nach einer Periode $p=0$ gilt, also q bzw. Φ sich ändert, oder genauer wenn derselbe Punkt der Kennlinie erreicht wird. Da die beiden Kennlinien keine geschlossenen Schleifen haben, gilt diese Aussage und daher sind die beiden Eintore A und B verlustfrei.
- linear: Linearität ist mathematisch für Kennlinien dann gegeben, wenn sie ein affiner Unterraum der u-q, bzw. i-Φ-Ebene sind. Das entspricht einer Geraden als Kennlinie, was bei B aber nicht bei A gegeben ist. Also nur B ist linear.
- streng linear: Strenge Linearität ist mathematisch folgendermaßen gegeben:
$(u,q)\in\mathcal{F}_C \Rightarrow (ku,kq)\in\mathcal{F}_C \;\; \forall k\in\mathbb{R} \;\wedge\; \forall (u_1,q_1),(u_2,q_2)\in\mathcal{F}_C \Rightarrow (u_1+u_2,\, q_1+q_2)\in\mathcal{F}$.
Also sind streng lineare reaktive Eintore linear und quellenfrei, bilden einen Unterraum der entsprechenden Ebene. Wenn man bei der mathematischen Definition $k=0$ einsetzt, merkt man, dass der Punkt (0,0) für strenge Linearität immer Bestandteil der Kennlinie sein soll. Ursprung liegt aber nicht in B, daher ist B nicht streng linear. Bei A ist es der Fall, aber sie ist nicht linear und kann deswegen auch nicht streng linear sein. Also ist A nicht streng linear.
- induktiv: Ein reaktives Eintor ist dann induktiv, wenn seine Kennlinie in i-Φ-Ebene dargestellt werden kann. Dieser ist nur bei A der Fall, deswegen ist A induktiv und B nicht induktiv.
- kapazitiv: Analog zur obigen Definition ist diese Eigenschaft nur für Eintore, deren Kennlinie in u-q-Ebene darstellbar sind, gegeben. Daher ist A nicht kapazitiv und B kapazitiv.
- stromgesteuert: Stromgesteuert ist ein Eintor, wenn seine Kennlinie eine Funktion von Strom ist, also für ein beliebiges i-Wert nur ein Φ-Wert sich ergibt. Das ist weder bei A noch bei B der Fall. Daher sind A und B nicht stromgesteuert.
- spannungsgesteuert: Analog soll die Kennlinie Funktion von u sein. Deswegen ist B u-gesteuert und A nicht.
- ladungsgesteuert: Kennlinie ist Fkt. von Ladung. A ist nicht q-gst. aber B ist schon.
- flussgesteuert: Kennlinie ist Fkt. von Fluss. A ist Φ-gesteuert aber B nicht.

b) In der letzten Teilaufgabe haben wir festgestellt, dass die Kennlinie B ein lineares, kapazitives Eintor darstellt. Aus der Kennlinie kann man leicht entnehmen, dass B eine Anfangsspannung U_0 besitzt. Es ist aber möglich diese Größe als eine Spannungsquelle mit dem Wert U_0 aufzufassen. Daher ist das Ersatzschaltbild die Reihenschaltung einer ungeladenen Kapazität C und einer Spannungsquelle U_0.

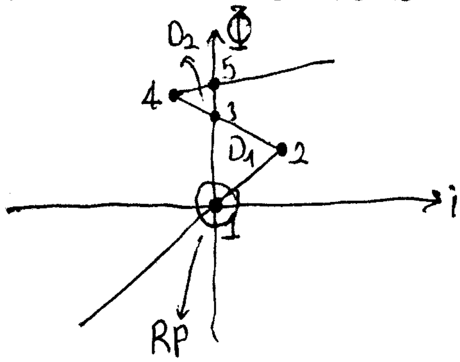
ESB: von B



c) Ein Relaxationspunkt (=Ruhepunkt) hat die Eigenschaft, Energieminimum der Kennlinie zu sein. Berechnet man also die Energieaufnahme ausgegangen von diesem Punkt bis zu einem beliebigen Punkt der Kennlinie, ist sie niemals negativ:

$$\forall q_1 : \int_{q^*}^{q_1} u(q)\,dq \geq 0 \quad \text{oder} \quad \forall \Phi_1 : \int_{\Phi^*}^{\Phi_1} i(\Phi)\,d\Phi \geq 0 \quad \text{mit Relaxationspunkt } q^* \text{ bzw. } \Phi^*.$$

Kandidaten für Ruhepunkte sind deswegen Schnittpunkte mit Achsen, Knickpunkte und Extrema.
Zuerst nummerieren wir die Kandidaten auf A:



①: Geht man vom Ursprung nach links, so ist i negativ und Φ nimmt ab, daher $W = \int i \cdot \frac{d\Phi}{dt} dt > 0$ gilt, was für ein RP kein Problem darstellt. Geht man rechts, so ist i positiv und Φ nimmt zu bis zum Punkt 3. Daher wird auch bis 3 Energie aufgenommen. Beim Weiterlaufen nimmt Φ immer noch zu aber i ist bis 5 negativ, was einer Energieabgabe entspricht. Insgesamt stellt es aber kein Problem dar, da die Energie, die zur Fläche zwischen der Kurve und Φ-Ebene entspricht, insgesamt positiv ist. Der Grund ist, dass der Dreieck D_1, dessen Fläche positiv zählt, größer ist als die negative Fläche von D_2. Ausgegangen vom Punkt ① bis zum Punkt ⑤ ist man immer noch bei positiven Energien. Läuft man weiter ab 5, so ist i positiv und Φ nimmt zu, was einer positiven Energie entspricht. Deshalb ist ① ein Ruhepunkt.

②: Geht man von 2 nach unten, so gilt $i>0$, aber Φ nimmt ab. Deswegen wird man sofort negativ und ② ist kein Ruhepunkt.

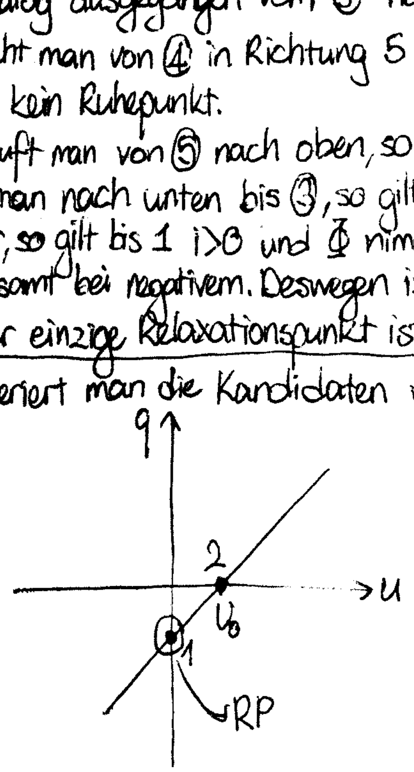
③: Analog ausgegangen vom ③ nach unten ist i positiv und Φ nimmt ab. Daher ist ③ auch kein Ruhepunkt.

④: Geht man von ④ in Richtung 5 nimmt Φ zu und gleichzeitig gilt $i<0$. Deswegen ist Energie abgegeben und ④ ist kein Ruhepunkt.

⑤: Läuft man von ⑤ nach oben, so ist i positiv und Φ steigt, was der Ruhepunktdefinition nicht widerspricht. Geht man nach unten bis ③, so gilt $i<0$ und Φ sinkt, deshalb zählt die Fläche von D_2 positiv. Läuft man weiter, so gilt bis 1 $i>0$ und Φ nimmt ab. Daher zählt die Fläche von D_1 negativ. Da aber $D_1 > D_2$ gilt, ist man insgesamt bei negativem. Deswegen ist 5 kein Ruhepunkt

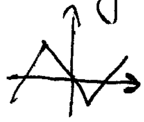
$\Rightarrow$ Der einzige Relaxationspunkt ist der Ursprung.

Nummeriert man die Kandidaten von B:



①: Geht man von 1 nach unten, so ist u negativ und q nimmt ab, daher gilt: $W = \int u \cdot \frac{dq}{dt} dt > 0$. Läuft man nach oben, dann gilt $u>0$ und $\frac{dq}{dt} > 0$, daher ist die Energie auch positiv und damit ist ① ein Ruhepunkt.

②: Folgt man die Kennlinie nach unten, so ist u bis 1 positiv, aber q nimmt ab. Deswegen ist die Energie negativ und ② ist kein Ruhepunkt.

Anmerkung: Bei linearen Kennlinien gibt es genau einen Relaxationspunkt (abgesehen von überidealisierten Kennlinien wie ). Dieser RP ist immer der q- bzw. Φ-Achsenabschnitt. Dabei sei es angemerkt, dass Kennlinien mit negativer Steigung auch idealisiert sind und wie bei einem negativen Widerstand solche:  Kennlinien haben.

A2) In dieser Aufgabe geht es um einige Methoden, um die Eigenschaften der folgenden stückweise linearen Induktivität $\mathcal{L}$ zu analysieren.

$$\Phi(i) = \begin{cases} 2H\cdot i + 6Wb, & i \leq -2A \quad (1) \\ -1H\cdot i, & -2A < i \leq 2A \quad (2) \\ 2H\cdot i - 6Wb, & 2A \leq i \quad (3) \end{cases}$$

a) Für den gegebenen zeitlichen Verlauf von der Ladung als $q(t) = \cos(\omega t)\cdot 1As$ sollen $i(t)$, $u(t)$ und $\Phi(t)$ berechnet werden. Den zeitlichen Verlauf von Strom kann man leicht über die bekannte Differentialgleichung $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ berechnen:

$$\underline{i(t)} = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\omega t\cdot 1As) = \underline{-\omega\sin\omega t\cdot 1As} \quad \begin{pmatrix}\text{Nachdifferenzieren}\\ \text{nicht vergessen!}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}(\cos x)' = -\sin x \\ (\cos ax)' = -a\sin ax\end{pmatrix}$$

Den Fluss kann man über die gegebenen Kennlinienbeziehung ermitteln, indem man für i $-\omega\sin\omega t\cdot 1As$ einsetzt:

$$\Phi(t) = \Phi(i(t)) = \begin{cases} 2H\cdot 1As\cdot(-\omega\sin\omega t) + 6Wb, & t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right) \\ -1H\cdot 1As\cdot(-\omega\sin\omega t), & \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right) > t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right) \\ 2H\cdot 1As\cdot(-\omega\sin\omega t) - 6Wb, & \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right) \geq t \end{cases}$$

Für die Grenzen geht man dabei folgendermaßen vor:

Vorsicht: Richtung dreht sich bei − Kürzen.

- $i \leq -2A \Leftrightarrow -\omega\sin\omega t\cdot 1As \leq -2A \Leftrightarrow \omega\sin\omega t\cdot 1s \geq 2 \Leftrightarrow \sin\omega t \geq \frac{2}{\omega\cdot 1s} \Leftrightarrow \omega t \geq \arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right)$ Umkehrfunktion von sin
  $\Rightarrow \underline{t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right)}$
- $i > -2A$: analog $\Rightarrow \underline{t < \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right)}$
  Richtung dreht sich!
- $i \leq 2A \Leftrightarrow -\omega\sin\omega t\cdot 1As \leq 2A \Leftrightarrow \sin\omega t \geq \frac{-2}{\omega\cdot 1s} \Rightarrow \underline{t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right)}$
- $i \geq 2A$: analog $\Rightarrow t \leq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right)$

Letztendlich kann man die Spannung über die Differentialgleichung $u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$ berechnen:

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \begin{cases} 2H\cdot 1As\cdot(-\omega^2\cos\omega t), & t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right) \\ -1H\cdot 1As\cdot(-\omega^2\cos\omega t), & \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{2}{\omega\cdot 1s}\right) > t \geq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right) \\ 2H\cdot 1As\cdot(-\omega^2\cos\omega t), & t \leq \frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{-2}{\omega\cdot 1s}\right) \end{cases}$$

→ Beim Differenzieren fallen die konstanten Summanden ($\pm 6Wb$) weg.

b) Um die Kennlinie zu zeichnen ist es zweckmäßig, die Grenzwerte einzusetzen und Stetigkeit zu überprüfen.

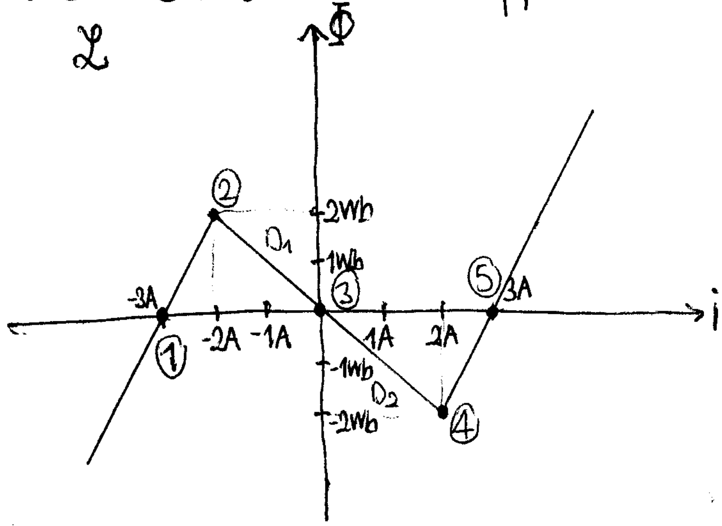
$\Phi(-2A^-) = 2H\cdot(-2A)+6Wb = 2Wb$

$\Phi(-2A^+) = -1H\cdot(-2A) = 2Wb$ ✓ (→Stetig)

$\Phi(2A^-) = -1H\cdot(2A) = -2Wb$ ✓ (→Stetig)

$\Phi(2A^+) = 2H\cdot(2A)-6Wb = -2Wb$

Da die Kennlinie stetig ist, muss man lediglich die drei Kennlinienäste, die Geraden sind, in die drei Bereiche einzeichnen und an den Grenzen verknüpfen.



-Anmerkung: Um unnötige Punktabzüge in der Prüfung zu vermeiden, tragen Sie bitte die Achsenbeschriftung und Achsenskalierung bei den Skizzen immer ein!

c) Diese Aufgabe kann sowohl analytisch mithilfe der Formel für die Energie $W_{\mathcal{L}} = \int_{\Phi_{P_1}}^{\Phi_{P_2}} i(\Phi)\,d\Phi$, als auch graphisch durch die Addition der über Φ-Achse liegenden Flächen gelöst werden.

• Analytisch: Da die Funktion $i(\Phi)$ stückweise definiert ist, ist es sinnvoll das Integral in Teilintegrale zu spalten und dann auszuwerten. Dafür soll man aber den Integrand $i(\Phi)$ in den nötigen Bereichen analytisch ausdrücken.

• von $P_1(0,0)$ zu $P^*(2A,-2Wb)$: $\Phi(i) = -1H\cdot i \Leftrightarrow i(\Phi) = \frac{-1}{1H}\cdot\Phi$

• von $P^*(2A,-2Wb)$ zu $P_2(4A,2Wb)$: $\Phi(i) = 2H\cdot i - 6Wb \Leftrightarrow i(\Phi) = \frac{1}{2H}\cdot\Phi + 3A$

Anmerkung: Eine vollständige Funktion $i(\Phi)$ kann man nicht definieren, da die Kennlinie nicht flussgesteuert ist. Trotzdem reicht diese stückweise Definition für die vorliegende Berechnung aus.

→Energie:

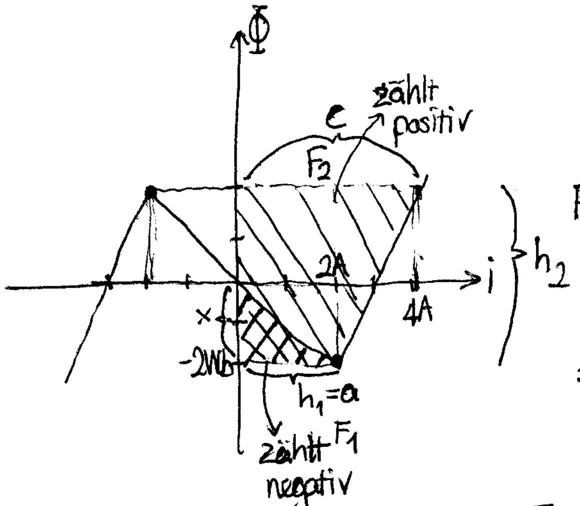
$$W_{\mathcal{L}} = \int_{\Phi_{P_1}}^{\Phi_{P_2}} i(\Phi)\,d\Phi = \int_0^{-2Wb} \frac{-1}{1H}\cdot\Phi\,d\Phi + \int_{-2Wb}^{2Wb} \frac{1}{2H}\cdot\Phi + 3A\,d\Phi = \left[\frac{-1}{H}\cdot\frac{\Phi^2}{2}\right]_0^{-2Wb} + \left[\frac{1}{2H}\cdot\frac{\Phi^2}{2} + 3A\cdot\Phi\right]_{-2Wb}^{2Wb}$$

$$= \left(\frac{-1}{2H}\cdot(-2Wb)^2 - \cancel{\frac{-1}{2H}\cdot(0)^2}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4H}\cdot(2Wb)^2} + 3A\cdot 2Wb - \cancel{\frac{1}{4H}\cdot(-2Wb)^2} - 3A\cdot(-2Wb)\right) = \frac{-4Wb^2}{2H} + 6A\,Wb + 6A\,Wb$$

$$= -2J + 12J = 10J$$

• Graphisch: Für diese Methode soll man die Kennlinie zeichnen und die Flächen zwischen der Kurve und der Φ-Achse berechnen. Beim Aufaddieren der Flächen ist darauf zu achten, ob die Fläche positiv oder negativ zählt. Eine Fläche zählt positiv, wenn beim Durchlaufen der Kennlinie darüber i und $\frac{d\Phi}{dt}$ gleiche Vorzeichen haben. Besitzen sie unterschiedliche Vorzeichen, dann zählt die Fläche negativ.

In dieser Aufgabe zählt die Fläche unter der Kurve beim Laufen von $P_1(0,0)$ zu $P^*(2A,-2Wb)$ negativ, da $i>0$ gilt, aber Φ abnimmt, also $\frac{d\Phi}{dt}<0$. Zwischen $P^*(2A,-2Wb)$ und $P_2(4A,2Wb)$ gilt $i>0$ und Φ nimmt zu, deswegen zählt diese Fläche positiv.



F_1 beträgt (Fläche von Dreieck):

$$F_1=\frac{1}{2}\cdot h_1\cdot x=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

F_2 beträgt (Fläche von Trapez):

$$F_2=\frac{1}{2}\cdot h_2(a+c)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(2+4)=12$$

$$\Rightarrow F_{ges}=F_2-F_1=12-2=10 \Rightarrow W_{\mathcal{L}}=10J$$

→ Wie erwartet stimmen die beiden Ergebnisse überein. Die nötige Energie beträgt damit 10J. Da dieser Wert positiv ist, hat das System <u>Energie aufgenommen</u>.

d) Um die Relaxationspunkte zu bestimmen folgen wir das gleiche Formalismus wie in Aufgabe 1c). Die 5 Kandidaten sind in der Teilaufgabe b) gemerkt.

①: 1 ist kein RP, da Durchlaufen nach oben negative Energiewerte wegen $i<0$ und $\frac{d\Phi}{dt}>0$ ergibt.

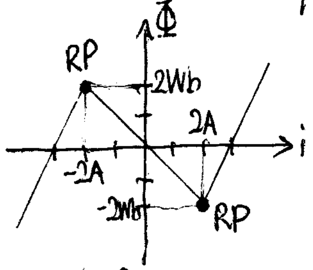
②: Geht man von 2 in Richtung 1 und weiter bis zu $-\infty$, gilt $i<0$ und $\frac{d\Phi}{dt}<0$, daher stellt dieser Ast kein Problem dar. Von 2 bis 3 beobachtet man dieselbe Situation. Zwischen 3 und 4 gilt $i>0$ und $\frac{d\Phi}{dt}<0$, was negativer Energie entspricht, jedoch sind die beiden Dreiecke gleich groß und kompensieren sich vollständig bei ④. Da man immer noch nicht negativ ist, ist es auch kein Problem. Von 4 zu 5 und weiter ist Energie wieder positiv, da $i>0$ gilt und Φ zunimmt. <u>Daher ist ② ein RP.</u>

③: Geht man von 3 aus nach rechts oder links, wird die Energie immer negativ. Deswegen ist ③ kein RP.

④: 4 geht voll analog zu 2. Nach rechts (in Richtung 5) gilt $i>0$ und $\frac{d\Phi}{dt}>0$. Nach links wird es zuerst positiv und dann negativ. D_1 und D_2 kompensieren sich wieder und von 2 in Richtung 1 und weiter ist sie wieder positiv. <u>Daher ist ④ auch ein RP.</u>

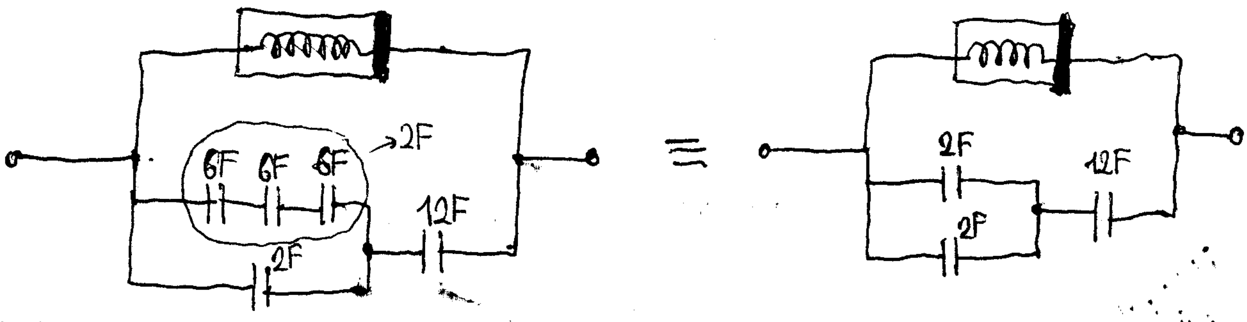
⑤: 5 ist kein RP, da Durchlaufen in Richtung 4 negative Energiewerte ergibt.

→ So sind ② und ④ Ruhepunkte und werden in untenstehender Kennlinie eingetragen:



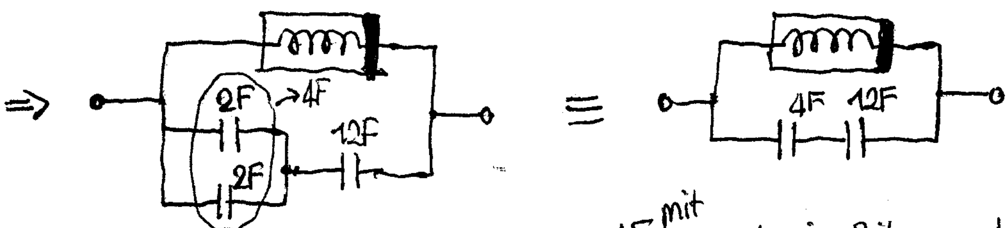
e) Um diese Aufgabe zu beantworten, greifen wir auf die Aussage, dass Kapazitäten analog zu Leitwerten und Induktivitäten analog zu Widerständen behandelt werden sollen, zurück. Um in Reihe geschaltete Kapazitäten zusammenzufassen gilt daher $C_{ges}=C_1 \| C_2 \| \ldots \| C_n$, wobei $\|$ die parallele Summe andeutet. Sind Kapazitäten parallel verschaltet, so ergibt sich die Gesamtkapazität durch $C_{ges}=C_1+C_2+\ldots+C_n$. Betrachtet man das Schaltbild, so sind zunächst die in Serie geschaltete 3 Kapazitäten mit $C_1=C_2=C_3=6F$ zu verknüpfen:

$$C_{ges}=6F \| 6F \| 6F \Leftrightarrow \frac{1}{C_{ges}}=\frac{1}{6F}+\frac{1}{6F}+\frac{1}{6F}=\frac{3}{6F}=\frac{1}{2F} \Rightarrow \underline{C_{ges}=2F}$$



Deshalb kann man die Schaltung wie oben ersetzen. Dann sollen die zwei parallel geschalteten Kapazitäten mit $C_1=C_2=2F$ zusammengefasst werden.

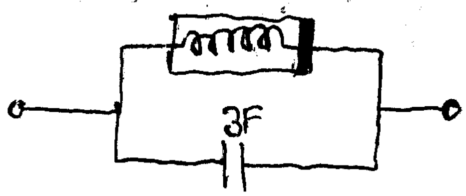
$\underline{C_{ges}}=C_1+C_2=2F+2F=\underline{4F}$



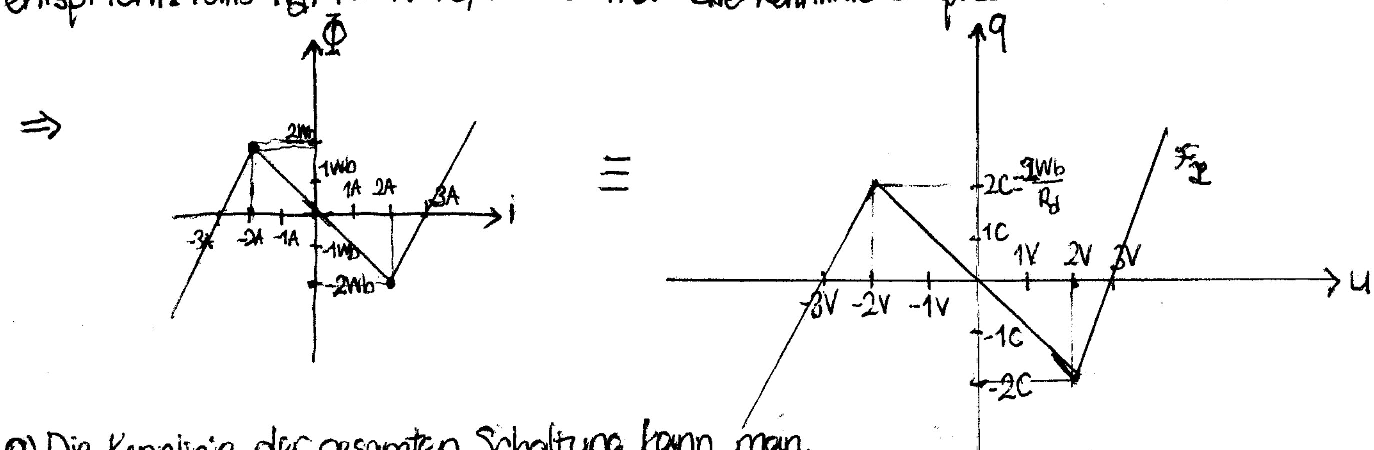
Nun soll die neu berechnete Kapazität 4F mit der in Reihe geschaltete 12F-Kapazität verknüpft werden.

$$C_{ges}=4F \| 12F \Longrightarrow \frac{1}{C_{ges}}=\frac{1}{4F}+\frac{1}{12F}=\frac{3}{12F}+\frac{1}{12F}=\frac{4}{12F}=\frac{1}{3F} \Rightarrow \underline{C_{ges}=3F}$$

Das endgültige ESB ergibt sich zu:

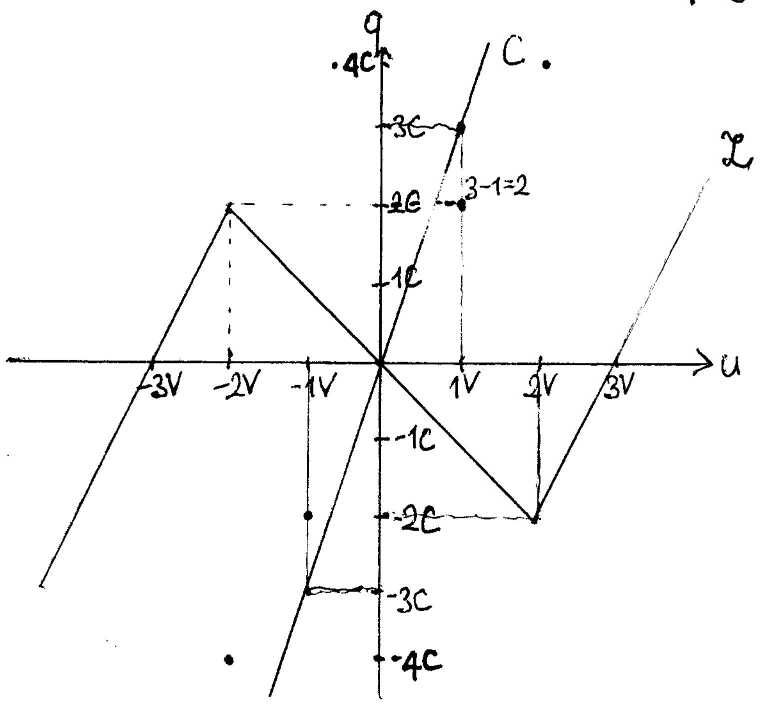


f) Bei der Dualwandlung einer Induktivität in eine Kapazität gilt der Vorschrift $f_L(i,\Phi) \rightarrow f_L\left(\frac{u}{R_d}, q\cdot R_d\right)=f_C(u,q)$, da für die Umrechnung mit der Dualitätskonstante R_d des Gyrators $i \rightarrow \frac{u}{R_d}$, $u \rightarrow iR_d$, $q \rightarrow \frac{\Phi}{R_d}$ und $\Phi \rightarrow q\cdot R_d$ gelten. Wendet man diesen Vorschrift graphisch an, so soll man die Kennlinie von $\mathcal{L}$ einfach in u-q-Ebene zeichnen und die Achsen geeignet skalieren. Da $R_d=1\Omega$ gilt, ist diese Skalierung besonders einfach, da 1A in i-Φ-Ebene zu $1A\cdot R_d=1A\cdot 1\Omega=1V$ und 1Wb zu $\frac{1Wb}{R_d}=\frac{1Vs}{1\Omega}=1As=1C$ entspricht. Falls $R_d \neq 1\Omega$ wäre, würde man die Kennlinie entsprechend stauchen oder strecken.



g) Die Kennlinie der gesamten Schaltung kann man graphisch ermitteln, da sowohl die duale Kennlinie von $\mathcal{L}$ als auch die Kennlinie von der dazu parallel geschalteten Kapazität mit C=3F in u-q-Ebene dargestellt werden können. Da diese beiden Bauelemente parallel verschaltet sind, soll man einfach eine Kennlinienaddition in u-q-Ebene durchführen. Diese Methode ist äquivalent zu die Kennlinien untereinander zu skizzieren und für gleiche Spannungswerte die Ladungen aufaddieren.

Wendet man diese Methode an, so kommt man folgendermaßen auf die gesuchte Kennlinie:



Die Kennlinie der Kapazität stellt man mithilfe der Beziehung $q = C \cdot u$ dar. Das heißt, dass die Kapazitätswert $C = 3F$ in u-q-Ebene die Steigung darstellt (analog zu G bei $i = G \cdot u$). Da $q = 3F \cdot u$ offensichtlich quellenfrei ist, ist die Kennlinie eine Ursprungsgerade mit der Steigung 3.

$\Rightarrow$