MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 10

A1) Im Rahmen dieser Aufgabe sollen wir einem japanischen Ingenieur als sein Praktikant helfen, indem wir den DT2-Regler mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)=\frac{-2j\omega \cdot s}{1+\omega^2 s^2}$, den er für ein Projekt als Regelungsanordnung entworfen hat, für verschiedene Netzspannungen testen. Die Tests sind so durchzuführen, dass für gegebene Eingangsspannungen die Ausgangsspannungen berechnet werden. Die Eingangsspannungen, also Netzspannungen sind Wechselspannungen und durch sinusförmige Signalverläufe modellierbar. Da die komplexe Übertragungsfunktion $H(j\omega)=\frac{U_a}{U_e}$, die der Quotient zweier komplexer Zeiger ist, schon gegeben ist, eignet sich an dieser Stelle, die komplexe Wechselstromrechnung mit komplexen Zeigergrößen hervorragend, statt mit den reellen zeitlichen Verläufen $u_e(t)$, $u_a(t)$ zu arbeiten. Nun machen wir einige Vorüberlegungen über komplexe Wechselstromrechnung mit Zeigern, um unsere Arbeit für die Aufgabe zu erleichtern.

Komplexe Wechselstromrechnung eignet sich für lineare, zeitvariante Schaltungen im stationären Betrieb mit sinusoidaler Erregung. Wir haben die Übertragungsfunktion für den stationären Betrieb gegeben und nach der Angabe ist die Netzspannung in Japan sinusförmig. Deshalb können die Analysemethoden aus ST2-Vorlesung für diesen Regler verwendet werden. Der ganz wichtige Zusammenhang aus der Vorlesung ordnet jedem reellen sinusförmigen Signal, das allgemein in Form $a(t)=A_m\cos(\omega t+\alpha)$ darstellbar ist, einen komplexen Zeiger in der Form $A=A_m e^{j\alpha}$ zu. Laut Vorlesung ist diese Zuordnung eindeutig. Das heißt, dass ein reelles Signal mit genau einem komplexen ruhenden Zeiger dargestellt werden kann. Um diese Zuordnung rückgängig zu machen, soll aus diesem nichtbeweglichen Zeiger $A=A_m e^{j\alpha}$ durch Multiplikation mit $e^{j\omega t}$ ein rotierender Zeiger $A_m e^{j(\omega t+\alpha)}$ erzeugt werden. Dann kann man das ursprüngliche Signal durch Realteilbildung erzeugen. Die Rechnung sieht wie folgt aus:

$$\mathrm{Re}\{\underbrace{\underset{\text{ruh. Zeiger}}{A}\cdot e^{j\omega t}}_{\text{rot. Zeiger}}\}=\mathrm{Re}\{A_m e^{j\alpha}\cdot e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}\{A_m e^{j(\omega t+\alpha)}\}\underset{\text{Euler-Formel}}{=}\mathrm{Re}\{A_m\cos(\omega t+\alpha)+jA_m\sin(\omega t+\alpha)\}=A_m\cos(\omega t+\alpha)=a(t).$$

Es gilt also der Zusammenhang $a(t)=\mathrm{Re}\{A\cdot e^{j\omega t}\}$ zwischen dem reellen Signal und komplexen Zeiger des Signals. Außerdem steht mit den Herleitungen aus dem Skript uns 3 Hilfssätze beim Rechnen mit komplexen Zeigern zur Verfügung, nämlich die Eineindeutigkeit, die Linearität und die Differentiation. Die Eineindeutigkeit besagt, wie oben erwähnt, dass ein Signal und der dazugehörige Zeiger eineindeutig zueinander zugeordnet sind. Dieser Satz besagt also, dass zwei Signale genau dann gleich sind, wenn die zugehörigen Zeiger auch gleich sind. Die Linearität besagt, dass der Zeiger einer Linearkombination von Signalen, der gleichen Linearkombination der den einzelnen Signalen zugehörigen Zeigern gleich ist. Der Differentiationssatz erlaubt die Ersetzung eines beim reellen Signal vorkommenden zeitlichen Ableitungsoperators $\frac{d}{dt}$ durch ein $j\omega$.

a) Um diese allgemeine Abhängigkeit anzugeben, sollen nur die Vorüberlegungen beobachtet werden. Da wird es erläutert, dass

$$\boxed{u_e(t)=\mathrm{Re}\{U_e e^{j\omega t}\}}$$

gilt, wobei U_e dem Signal $u_e(t)$ zugehörigen komplexen Zeiger darstellt.

b) Nun ist die erste sinusoidale Netzspannung mit der Frequenz $\omega = 50\frac{1}{s}$ gegeben. Der reelle zeitliche Verlauf der Eingangsspannung lautet $u_{e_1}(t) = 100V\cos\left(50\frac{1}{s}\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$. Da die Übertragungsfunktion $H(j\omega) = \frac{U_a}{U_e}$ gegeben ist, ist es sinnvoll, zuerst zu $u_{e_1}(t)$ zugehörigen Zeiger U_{e_1} zu bestimmen und dann der Ausgangsspannung $u_{a_1}(t)$ zugehörigen Zeiger U_{a_1} durch $U_{a_1} = H(j\omega)\cdot U_{e_1}$ zu berechnen. Vergleicht man die gegebene Eingangsspannung mit der allgemeinen Form aus Teilaufgabe a) oder aus den Vorüberlegungen (da statt A ein A_m, sonst gleich), die $u_e(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ lautet, so kann man die Parameter A, ω und α durch einen Koeffizientenvergleich ermitteln. Es gilt $\underline{A = 100V}$, $\underline{\omega = 50\frac{1}{s}}$ und $\underline{\alpha = \frac{\pi}{4}}$. Der zu diesem Signal zugehörige Zeiger lautet dann gemäß der Vorüberlegung allgemein $U_e = A\cdot e^{j\alpha}$ und für dieses Beispiel $\underline{U_{e_1} = 100V\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}$. Jetzt soll die von ω abhängige Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ an der Netzfrequenz $\omega = 50\frac{1}{s}$ ausgewertet werden, um dann die Multiplikation durchzuführen. Es gilt:

$$H\left(j\cdot 50\frac{1}{s}\right) = \frac{-2j\cdot 50\frac{1}{s}\cdot 1s}{1+\left(50\frac{1}{s}\right)^2\cdot 1s^2} = \frac{-j\cdot 100\frac{1}{\cancel{s}}\cdot 1\cancel{s}}{1+2500\frac{1}{\cancel{s^2}}\cdot 1\cancel{s^2}} = \frac{-j\cdot 100}{1+2500} \overset{2500\gg 1}{\approx} \frac{-j\cdot 100}{2500} = \frac{-j}{25}$$

Es wird bei der Berechnung die in der Angabe angedeutete Näherung verwendet, nämlich 1 wird gegenüber 2500 vernachlässigt. Um das Produkt der Multiplikation direkt als Zeiger auffassen zu können, soll nun dieser Wert von H in Betrag und Phase zerlegt werden. Der Betrag einer komplexen Zahl z kann man wie aus Mathe bekannt mit der Formel $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ berechnen. Die Phase kann über folgende Vorschrift bestimmt werden:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) & \text{für } Re(z) \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + \pi & \text{für } Re(z) < 0 \end{cases}$$

Es gilt ja $H\left(j\cdot 50\frac{1}{s}\right) = \frac{-j}{25}$. Damit ist $H\left(j\cdot 50\frac{1}{s}\right)$ eine komplexe Zahl mit $\underline{Re(H) = 0}$, $\underline{Im(H) = \frac{-1}{25}}$, da allgemein $z = Re(z) + j\cdot Im(z)$ für komplexe Zahlen gilt. Daraus folgt:

$$|H| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-1}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{625}} = \frac{1}{25} \quad \text{und} \quad \varphi(H) \underset{Re=0}{=} \arctan\left(\frac{\frac{-1}{25}}{0}\right) = \arctan(-\infty) \overset{\text{siehe Mathe}}{=} \frac{-\pi}{2}.$$

Allgemein kann eine komplexe Zahl z durch Betrag und Phase mit $z = |z|\cdot e^{j\varphi(z)}$ dargestellt werden. Für unseren Fall gilt daher: $\boxed{H\left(j\cdot 50\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{25}e^{-j\frac{\pi}{2}}}$.

Nun kann die Multiplikation durchgeführt werden:

$$\underline{U_{a_1}} = U_{e_1}\cdot H\left(j\cdot 50\frac{1}{s}\right) = 100V\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{25}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 100V\cdot\frac{1}{25}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 4V\,e^{j\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \underline{4V\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{4}}}$$

Um letztendlich den reellen Verlauf $u_{a_1}(t)$ zu bestimmen, kann auf den allgemeinen Zusammenhang aus Teilaufgabe a) zurückgegriffen werden. Es gilt:

$$\rightarrow u_{a_1}(t) = Re\{U_{a_1}\cdot e^{j\omega t}\} = Re\{4V\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot e^{j\omega t}\} = Re\{4V\cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}\} = Re\{4V\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + j4V\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\}$$

$$\Rightarrow u_{a_1}(t) = 4V\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \xRightarrow{\omega = 50\frac{1}{s}} \boxed{u_{a_1}(t) = 4V\cos\left(50\frac{1}{s}\cdot t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Aus diesem Ergebnis kann man auch ablesen, dass die Antwort des Reglers auf eine sinusförmige Erregung mit der Frequenz ω, auch sinusförmig mit der gleichen Frequenz ω ist. Der Regler skaliert und ändert die Phase nur, also übt die Übertragungsfunktion einer linearen, zeitinvarianten, dynamischen Schaltung eine Drehstreckung aus. Siehe auch den Satz in der Zusammenfassung 10 dazu.

c) Ganz analog zu der vorherigen Teilaufgabe rechnet man zuerst $\underline{U}_{e_2}$, dann $H(j\omega)\big|_{\omega=60Hz}$. Danach zerlegt man H in Betrag und Phase, führt die Multiplikation durch, erhält damit $\underline{U}_{a_2}$. Letzterdlich dient wieder der Zusammenhang aus a) zur Berechnung von $u_{a_2}(t)$:

$$\rightarrow u_{e_2}(t) = 100V\cos\left(60\tfrac{1}{s}\cdot t + \tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow A = 100V,\ \omega = 60\tfrac{1}{s},\ \alpha = \tfrac{\pi}{2}\ \text{, da allg. } u_e(t) = A\cos(\omega t+\alpha) \text{ gilt.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}_{e_2} = Ae^{j\alpha} = 100V\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}}$$

$$\rightarrow H\left(j\cdot 60\tfrac{1}{s}\right) = \frac{-2j\cdot 60\frac{1}{\cancel{s}}\cancel{s}}{1+3600\frac{1}{\cancel{s^2}}\cdot 1\cancel{s^2}} = \frac{-j120}{1+3600} \overset{3600\gg 1\ \text{(Näherung)}}{\approx} \frac{-j120}{3600} = \frac{-j}{30} \Rightarrow Re(H)=0,\ Im(H) = \frac{-1}{30}$$

$$\Rightarrow |H| = \sqrt{0^2+\left(\tfrac{-1}{30}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{900}} = \tfrac{1}{30},\quad \varphi(H) \overset{Re(H)=0}{=} \arctan\left(\frac{-\frac{1}{30}}{0}\right) = \arctan(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{H\left(j\cdot 60\tfrac{1}{s}\right) = \tfrac{1}{30}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$\rightarrow \underline{U}_{a_2} = 100V\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{30}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 100V\cdot\frac{1}{30}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{3}V\underbrace{e^{j\overbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}}}_{=1} = \underline{\frac{10}{3}V}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{a_2}(t) = Re\left\{\underline{U}_{a_2}e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{\tfrac{10}{3}Ve^{j\omega t}\right\} = Re\left\{\tfrac{10}{3}V\cos\omega t + j\cdot\tfrac{10}{3}V\sin\omega t\right\} = \tfrac{10}{3}V\cos(\omega t)} \overset{\omega=60\frac{1}{s}}{\Longrightarrow} \boxed{u_{a_2}(t) = \tfrac{10}{3}V\cos\left(60\tfrac{1}{s}\cdot t\right)}$$

d) Diese Teilaufgabe kann man mit der gleichen Vorgehensweise lösen. Jedoch kann es schneller mithilfe des Linearitätssatzes gelöst werden. Die Eingangsspannung lautet $u_e(t) = u_{e_1}(t) + u_{e_2}(t)$. Nach dem Linearitätssatz aus den Vorüberlegungen gilt $\underline{\underline{U}_e = \underline{U}_{e_1} + \underline{U}_{e_2}}$. Es gilt ja immer noch $H(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ für die Übertragungsfunktion. Man kann daher $\underline{U}_a$ mit $\underline{U}_a = H(j\omega)\cdot\underline{U}_e = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_i}\left[\underline{U}_{e_1} + \underline{U}_{e_2}\right]$ berechnen. Wendet man den Distributivgesetz der Multiplikation an, so gilt:

$$\underline{U}_a = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_i}\left[\underline{U}_{e_1} + \underline{U}_{e_2}\right] = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_1}\underline{U}_{e_1} + H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_2}\underline{U}_{e_2} \quad \text{mit } \omega_1 = 50Hz,\ \omega_2 = 60Hz$$

Die beiden Summanden werden aber in Teilaufgaben b) und c) schon berechnet als $\underline{U}_{a_1} = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_1}\underline{U}_{e_1}$ und $\underline{U}_{a_2} = H(j\omega)\big|_{\omega=\omega_2}\cdot\underline{U}_{e_2}$. Damit gilt es:

$$\underline{\underline{U}_a = \underline{U}_{a_1} + \underline{U}_{a_2}}.$$

An dieser Stelle kann wieder die Linearität ausgenutzt werden:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_{a_1} + \underline{U}_{a_2} \Longleftrightarrow \boxed{u_a(t) = u_{a_1}(t) + u_{a_2}(t)}$$

Dadurch reicht es schon, die Ausgangsspannungen $u_{a_1}(t), u_{a_2}(t)$ aus Teilaufgaben b) und c) aufzuaddieren um die Ausgangsspannung $u_a(t)$ für die Eingangsspannung $u_e(t) = u_{e_1}(t) + u_{e_2}(t)$ zu berechnen. Nämlich gilt es:

$$\boxed{u_a(t) = 4V\cos\left(50\tfrac{1}{s}\cdot t - \tfrac{\pi}{4}\right) + \tfrac{10}{3}V\cos\left(60\tfrac{1}{s}\cdot t\right)}$$

A2) In dieser Aufgabe geht es darum, die Ausgangsspannung der vorliegenden Schaltung zu bestimmen. Dafür soll die Knotenspannungsanalyse, die im letzten Semester in ST1 ausführlich behandelt wurde, verwendet werden. Anders als die Knotenspannungsanalyse bei ST1, beinhalten die Schaltungen bei ST2 auch reaktive Bauelemente, also Kapazitäten und Induktivitäten. Diese Elemente müssen auch bei der Bestimmung der Knotenleitwertsmatrix $\underline{Y}_k$ berücksichtigt werden können. Abhilfe schafft man hier wieder mit komplexer Wechselstromrechnung, konkreter mit dem Differentiationssatz. Eine lineare Kapazität wird durch die Gleichung $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$ beschrieben. Verwendet man die komplexen Zeiger $\underline{I}_C, \underline{U}_C$ für i_C, u_C und ersetzt man den Ableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ mit $j\omega$ laut dem Differentiationssatz, kommt man auf die Beschreibung $\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$ für die lineare Kapazität C. Damit erhält man den komplexen Leitwert $\underline{Y} = j\omega C$ für diese Kapazität und kann diesen Wert in $\underline{Y}_k$ eintragen, wie man einen reellen Leitwert G eintragen würde. Analog kann man die Beschreibung der Induktivität $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$ in die Form $\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$ bringen. Jedoch ist diese Gleichung eine Widerstandsbeschreibung und damit $\underline{Z} = j\omega L$ ein komplexer Widerstand, der stromgesteuert ist. In $\underline{Y}_k$ dürfen aber nur spannungsgesteuerte Werte eingetragen werden. Daher formt man die Gleichung zu $\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L} \underline{U}_L$ um. Die komplexe Leitwert $\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$ kann in $\underline{Y}_k$ nun eingetragen werden, wiederum wie man einen reellen Leitwert G eintragen würde.

Nachdem die beiden neuen Bauelemente auch relativ einfach für die Knotenspannungsanalyse berücksichtigt werden können, kann dieses Analyseverfahren wie bei ST1 mit folgender Vorgehensweise allgemein durchgeführt werden:

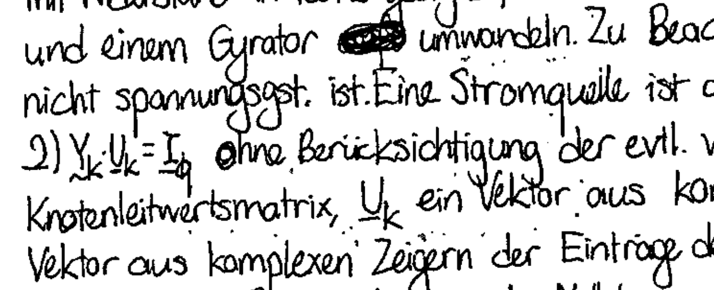
1) Alle nicht spannungsgesteuerte Elemente in solche durch Quellenumwandlung (für Spannungsquellen mit Widerstand in Reihe geeignet) oder durch das Ersetzen mit dem dualen spg.gesteuerten Element und einem Gyrator umwandeln. Zu Beachten ist, dass eine Spannungsquelle stromgesteuert und nicht spannungsgst. ist. Eine Stromquelle ist dagegen spannungsgst..

2) $\underline{Y}_k \underline{U}_k = \underline{I}_q$ ohne Berücksichtigung der evtl. vorhandenen Nulloren aufstellen, wobei $\underline{Y}_k$ die (komplexe) Knotenleitwertsmatrix, $\underline{U}_k$ ein Vektor aus komplexen Zeigern der Knotenspannungen u_{k_i} und $\underline{I}_q$ ein Vektor aus komplexen Zeigern der Einträge des Knoten-Stromquellenvektors $\underline{i}_q$ ist.

3) Schritte zur Berücksichtigung der Nullatoren und Noratoren durchführen.

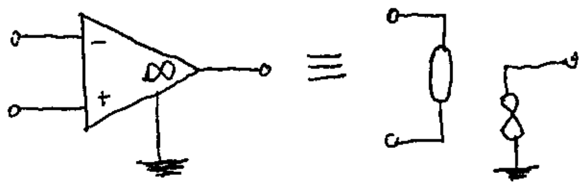
4) Durch das Lösen des Gleichungssystems $\underline{Y}_k \underline{U}_k = \underline{I}_q$ nach dem geforderten Knotenspannungszeiger auf das Endergebnis kommen oder vielleicht durch das Lösen eine Übertragungsfunktion bestimmen

a) Die Überführung der Spannungsquelle U_{in} in eine Stromquelle geschieht durch eine Quellenumwandlung, die wegen der Äquivalenz der Helmholtz/Thevenin- und Mayer/Norton-ESBs gültig ist. Fasst man den Leitwert $(\alpha+1)G$ als einen Widerstand $R = \frac{1}{(\alpha+1)G}$ auf, so hat man ganz links in der Schaltung die Spannungsquelle U_{in} mit dem Widerstand R in Reihe. Diesen Teil kann man durch Quellenumwandlung wie folgt ersetzen:

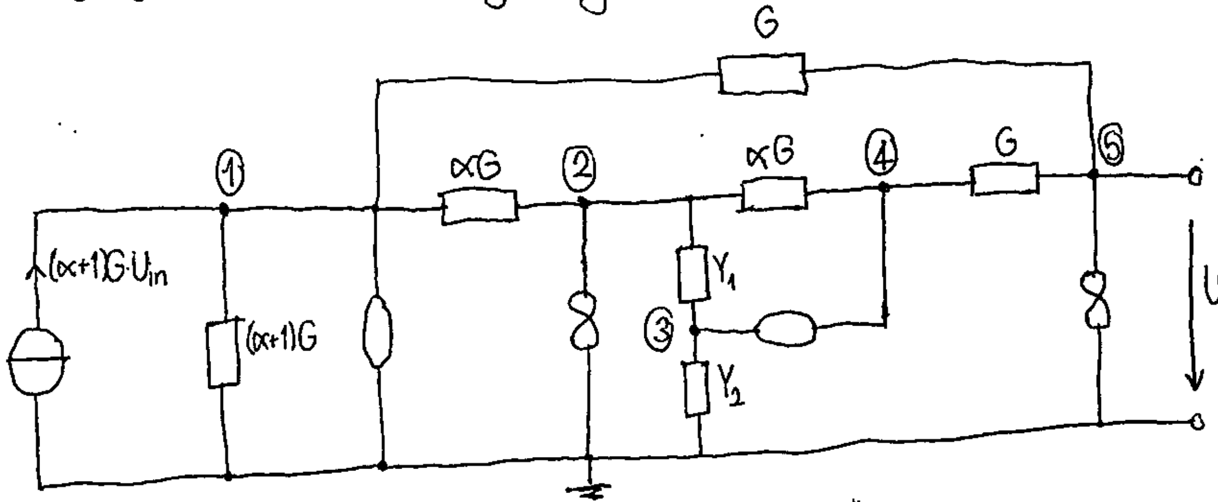


Dabei ist zu beachten, dass die Richtung der Pfeile der Spannungs- und Strom-Quelle umgekehrt sein sollen.

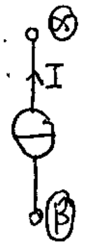
Das Nullor-Ersatzschaltbild eines idealen Op-Amps modelliert dieses im streng linearen Bereich seiner Kennlinie, indem der Eingang mit einem Nullator und Ausgang mit einem Norator ersetzt wird. Das Nullor-ESB sieht wie folgt aus:



Die resultierende Gesamtschaltung des gesamten aktiven Filters ist damit von folgender Gestalt:



b) In dieser Teilaufgabe soll die Gleichung $\underline{Y}_k \cdot \underline{U}_k = \underline{I}_q$, also sollen die Matrix $\underline{Y}_k$ und der Vektor $\underline{I}_q$ bestimmt werden. Es steht in der Aufgabenstellung, dass vorerst die Nullatoren und Noraten durch Leerlaufe ersetzt werden müssen, d.h., dass diese nicht berücksichtigt werden müssen. Die restlichen Elemente sollen einzeln mit bekannten Vorschriften aus ST1 in $\underline{Y}_k$ bzw. $\underline{I}_q$ eingetragen werden. In dieser Schaltung sind nur Leitwerte, auch einige komplexe, und eine Stromquelle vorhanden. Eine Stromquelle zwischen den Knoten α und β, wobei der Strom von β in α fließt, wird folgendermaßen berücksichtigt:



$$\underline{I}_q = \begin{bmatrix} \vdots \\ +I \\ \vdots \\ -I \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \\ \beta \\ \\ \end{array}$$

Also soll in die Zeile α des Vektors $\underline{I}_q$ der Stromwert und in die Zeile β von $\underline{I}_q$ der Negative des Stromwerts eingetragen werden. Wenn α oder β Massenknoten ist fallt der entsprechende Eintrag weg.

Ein Leitwert G zwischen den Knoten α und β, egal ob er reell oder komplex ist, wird folgendermaßen berücksichtigt:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \\ \underline{Y}_k = & \begin{bmatrix} \cdots G & \cdots -G \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots -G & \cdots G \cdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \alpha \\ \\ \beta \end{array} \end{array}$$

Dabei ist es wieder zu beachten, dass die mit dem Massenknoten zusammenfallenden Einträge wegfallen.

Damit kann man alle Leitwerte Schritt für Schritt in $\underline{Y}_k$ berücksichtigen. Die Stromquelle soll dem Vektor $\underline{I}_q$ Einträge liefern. Die Knotenleitwertsbeschreibung sieht wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} (\alpha+1)G+\alpha G+G & -\alpha G & 0 & 0 & -G \\ -\alpha G & \alpha G+Y_1+\alpha G & -Y_1 & -\alpha G & 0 \\ 0 & -Y_1 & Y_1+Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha G & 0 & \alpha G+G & -G \\ -G & 0 & 0 & -G & G+G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cancel{U_{k,1}} \\ U_{k,2} \\ U_{k,3} \\ \cancel{U_{k,4}} \\ U_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1)G\,U_{in} \\ \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{0} \end{bmatrix}$$

für nächste Teilaufgabe

Da es 5 Knoten in der Schaltung außer dem Massenknoten gibt, ist $\underline{\underline{Y}}_k$ eine 5x5-Matrix und $\underline{I}_q$ ein Vektor mit 5 Zeilen. Fasst man die Einträge von oben zusammen, so kommt man endgültig auf:

$$\begin{bmatrix} 2(\alpha+1)G & -\alpha G & 0 & 0 & -G \\ -\alpha G & 2\alpha G+Y_1 & -Y_1 & -\alpha G & 0 \\ 0 & -Y_1 & Y_1+Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha G & 0 & (\alpha+1)G & -G \\ -G & 0 & 0 & -G & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{k,1} \\ U_{k,2} \\ U_{k,3} \\ U_{k,4} \\ U_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1)GU_{in} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Die Nullatoren und Noratoren sind spezielle Bauelemente, die Freiheitsgrade der Schaltung und damit die Dimension von $\underline{\underline{Y}}_k, \underline{U}_k, \underline{I}_q$ ändern. Wie man diese Elemente berücksichtigt, ist wieder aus ST1 bekannt. Wenn es ein Nullator zwischen den Knoten ⓐ und Ⓑ gibt, dann soll man die Spalten ⓐ und Ⓑ aufaddieren und ⓐ+Ⓑ in Spalte ⓐ eintragen, (ⓐ mit ⓐ+Ⓑ ersetzen). Die Spalte Ⓑ und auch der β-te Eintrag von $\underline{U}_k$, also $U_{k,\beta}$ werden weggestrichen. Wenn ein Norator sich zwischen den Knoten ⓐ und Ⓑ befindet, sollen dann die Zeilen ⓐ und Ⓑ aufaddiert und ⓐ+Ⓑ in Zeile ⓐ geschrieben werden. Die Zeile Ⓑ und die β-te Zeile von $\underline{I}_q$ werden weggestrichen. Wenn ein Knoten von ⓐ, Ⓑ Masse ist, muss man dem anderen Knoten entsprechende Spalte (für Nullatoren) bzw. Zeile (für Noratoren) direkt wegstreichen.
In unserem Fall gibt es zwei Nullatoren und zwei Noratoren. Am Ende soll also eine 3x3 Matrix vorliegen. Da ein Norator zwischen ② und Masse, ein anderes Norator zwischen ⑤ und Masse liegen, sollen die Zeilen ② und ⑤, auch $I_{q,2}, I_{q,5}$ direkt weggestrichen werden. Ein Nullator liegt zwischen ① und Masse, daher soll die Spalte ① und $U_{k,1}$ auch direkt weggestrichen werden. Der andere Nullator ist zwischen ③ und ④. Deshalb sollen die Spalten ③ und ④ aufaddiert, in Spalte ③ geschrieben und Spalte ④ mit $U_{k,4}$ weggestrichen werden.
Führt man alle dieser Schritte durch, so kommt man auf folgende reduzierte Knotenspannungsbeschreibung
(Die Schritte werden auf dieser Seite ganz oben angedeutet)

$$\begin{bmatrix} -\alpha G & 0 & -G \\ -Y_1 & Y_1+Y_2 & 0 \\ -\alpha G & (\alpha+1)G & -G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{k,2} \\ U_{k,3} \\ U_{k,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+1)G\cdot U_{in} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Nachdem die Knotenspannungsbeschreibung aufgestellt wurde, kann das eigentliche Ziel erreicht werden, indem die gesuchte Übertragungsfunktion $H(p) = \frac{U_{out}}{U_{in}}$ durch das Lösen dieses Gleichungssystems berechnet wird. U_{in} ist schon in der Beschreibung, konkreter in $\underline{I}_q$ enthalten. Man kann aus der Schaltung direkt ablesen, dass $U_{k,5} = U_{out}$ ist, da U_{out} genau zwischen dem Knoten 5 und der Masse abfällt. Um den Quotient $\frac{U_{out}}{U_{in}}$ zu berechnen, gibt es zwei Wege.

Erstens kann die Cramersche Regel mit der Formel $U_{k,m} = \frac{\det(\underline{Y}_{k,m})}{\det(\underline{Y}_k)}$ verwendet wird. Dabei soll logischerweise $m=5$ gewählt werden, um $U_{k,5} = U_{out} = \frac{\det(\underline{Y}_{k,5})}{\det(\underline{Y}_k)}$ zu erhalten. Die Übertragungsfunktion kann dann durch Division der beiden Seiten mit U_{in} berechnet werden:

$$\boxed{H(p) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{\det(\underline{Y}_{k,5})}{\det(\underline{Y}_k)} \cdot \frac{1}{U_{in}}}$$

$\underline{Y}_{k,5}$ ist dabei die Matrix, die statt der mit $U_{k,5} = U_{out}$ multiplizierten Spalte, den Vektor $\underline{I}_q$ beinhaltet. Sie lautet also:

$$\underline{Y}_{k,5} = \begin{bmatrix} -\alpha G & 0 & (\alpha+1)GU_{in} \\ -Y_1 & Y_1+Y_2 & 0 \\ -\alpha G & (\alpha+1)G & 0 \end{bmatrix}$$

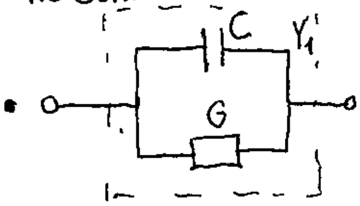
Zweitens kann die Unterdeterminantenregel mit $\frac{U_{km}}{I_n} = \frac{(-1)^{m+n}\det(\underline{Y}_{nm})}{\det(\underline{Y}_k)}$ verwendet werden. Dabei stellt I_n den n-ten Eintrag von $\underline{I}_q$ dar. Um U_{in} ins Spiel zu ziehen, soll daher $n=1$ gewählt werden. Um U_{out} zu bekommen, soll wieder $m=5$ gewählt sein. Damit gilt:

$$\frac{U_{k,5}}{I_1} = \frac{U_{out}}{(\alpha+1)GU_{in}} = \frac{\overbrace{(-1)^{5+1}}^{=1} \cdot \det(\underline{Y}_{15})}{\det(\underline{Y}_k)} \iff \boxed{H(p) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{\det(\underline{Y}_{15})}{\det(\underline{Y}_k)} \cdot (\alpha+1) \cdot G}$$

Dabei ist $\underline{Y}_{15}$ die reduzierte Knotenleitwertsmatrix, die aus $\underline{Y}_k$ durch das Wegstreichen der $n=1$-ten Zeile und $m=5$-ten Spalte erzeugt wird. In unserem Fall gilt also:

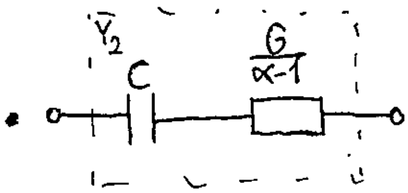
$$\underline{Y}_{15} = \begin{bmatrix} -Y_1 & Y_1+Y_2 \\ -\alpha G & (\alpha+1)G \end{bmatrix}$$

e) Um komplexe Leitwerte zusammenzufassen, geht man völlig äquivalent vor, wie die reellen Leitwerte zusammengefasst werden. D.h. zwei parallel geschaltete Leitwerte werden einfach aufaddiert ($Y_{ges} = Y_1 + Y_2$) und seriengeschaltete Leitwerte werden durch eine Parallelsumme verknüpft ($Y_{ges} = Y_1 \| Y_2 = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2}$).
Die komplexen Leitwerte für Kapazitäten und Induktivitäten werden, am Anfang dieser Musterlösung als $Y = j\omega C$ bzw $Y = \frac{1}{j\omega L}$ eingeführt. Damit können Y_1, Y_2 relativ einfach berechnet werden:



$\Rightarrow \boxed{Y_1 = G + j\omega C}$

Angabe



$$\Rightarrow Y_2 = \frac{\frac{j\omega C \cdot G}{\alpha - 1}}{j\omega C + \frac{G}{(\alpha-1)}} = \frac{\frac{j\omega C G}{\alpha-1}}{\frac{j\omega C(\alpha-1) + G}{\alpha-1}} = \frac{j\omega C \cdot G}{G + j\omega C(\alpha-1)}$$