MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 11

A1) Nach der Behandlung der mit den Methoden der komplexen Wechselstromrechnung erweiterten Knotenspannungsanalyse in der letzten Übungsstunde, ist das Ziel nun, das Ergebnis der diesmal für eine andere Schaltung durchgeführten Knotenspannungsanalyse zunächst geeignet darzustellen und dann eine qualitative Visualisierung der Systemeigenschaften anhand der Bodediagramme aus dieser Darstellung zu gewinnen. Meistens werden alle dieser Schritte in den Prüfungen in einer einzigen Aufgabe gepackt. Ein Bodediagramm ist dabei ein wichtiges Werkzeug um den Frequenzgang einer Übertragungsfunktion, die von ω bzw. in dieser Aufgabe gemäß einer Umbenennung $p=j\omega$ von p abhängt, zu veranschaulichen. Von der Übertragungsfunktion wird jeweils der Betrag $|H(j\omega)|$ und die Phase $\varphi(\omega)=\angle H(j\omega)$ folgendermaßen berechnet:

$$|H(j\omega)|=\sqrt{Re(H)^2+Im(H)^2}\;,\quad \varphi(\omega)=\begin{cases}\arctan\dfrac{Im(H)}{Re(H)} & \text{für } Re(H)\geq 0\\ \arctan\dfrac{Im(H)}{Re(H)}+\pi & \text{für } Re(H)<0\end{cases}$$

und dann wird $20\log_{10}|H(j\omega)|$ und $\varphi(\omega)$ gegenüber einer logaritmischen ω-Achse ~~[illegible]~~ in separaten Diagrammen gezeichnet. Dabei ist es hilfreich $H(j\omega)$ in möglichst einfache Faktoren zu zerlegen und die folgenden ~~Eigenschaften der~~ Rechenregeln der Rechnung mit Beträgen und Phasen verwenden:

$$H(j\omega)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{j\omega}{\beta_i}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{j\omega}{\alpha_k}\right)} \Rightarrow V(\omega)=20\log_{10}|H(j\omega)|=\sum_{i=1}^{n}20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{\beta_i}\right|-\sum_{k=1}^{m}20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{\alpha_k}\right|$$

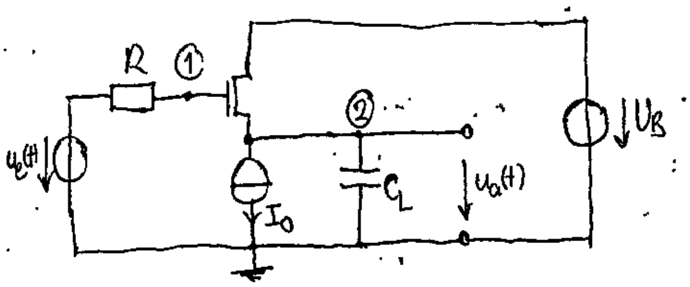
$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\arctan\left(\frac{\omega}{\beta_i}\right)-\sum_{k=1}^{m}\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha_k}\right)$$

Das heißt, dass die Multiplikanden der Übertragungsfunktion den Summanden des Betrags und der Phase entsprechen. Die Potenz des Nenners ist ja wegen $\frac{1}{N}=N^{-1}$, -1, und das wird mit dem negativen Vorzeichen in den obigen Formeln berücksichtigt. Deswegen kann man für eine relativ komplizierte Übertragungsfunktion die Bodediagramme durch Superposition der Bodediagramme der einfachen Faktoren relativ einfach skizzieren. Anhand der Bodediagramme kann man viele Eigenschaften des durch die Übertragungsfunktion ~~[illegible]~~ beschriebenen Systems darstellen, auch wie die Stabilität usw., aber für die Vorlesung Schaltungstechnik 2 ist das Ablesen des Frequenzverhaltens relevant. Man kann also mit Bodediagrammen schließen, ob das System Tiefpass-, Hochpass-, usw. Charakter zeigt, d.h. ob ~~kleine~~ große oder ~~große~~ kleine Frequenzen (oder andere) unterdrückt werden.

a) In dieser Teilaufgabe soll aus der gegebenen Knotenspannungsbeschreibung die Übertragungsfunktion $H(p)=\frac{\Delta u_a}{\Delta u_e}$ bestimmt werden, wobei wie oben erklärt, der Zusammenhang $p=j\omega$ gilt. Die gegebene Beschreibung sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R}+pC_{GS} & -pC_{GS}\\ -pC_{GS}-g_m & g_m+pC_L+pC_{GS}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U_{k1}\\ U_{k2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\Delta u_e}{R}\\ 0\end{bmatrix}$$

Außerdem wird die Schaltung, für die diese Beschreibung gilt, wie folgt gegeben:



Im Kleinsignalbetrieb, für die die Beschreibung gegeben ist, gilt natürlich $\Delta u_a = u_a$ und es ist außerdem aus der Schaltung direkt ersichtlich, dass $\Delta u_a = u_a(t) = U_{k2}$ gilt. Um die Übertragungsfunktion $H(p) = \frac{\Delta u_a}{\Delta u_e}$ zu bestimmen, soll man also $H(p) = \frac{U_{k2}}{\Delta u_e}$ berechnen. Δu_e ist dabei in dem ersten Eintrag von I_q erhalten, also gilt es $I_1 = \frac{\Delta u_e}{R}$. Damit gilt für die Übertragungsfunktion $H(p) = \frac{1}{R}\cdot\frac{U_{k2}}{I_1}$. Der Quotient $\frac{U_{k2}}{I_1}$ kann wie aus der letzten Übung bekannt, mit der Formel:

$$\frac{U_{km}}{I_n} = \frac{(-1)^{n+m}\det \underset{\sim}{Y}_{nm}(p)}{\det \underset{\sim}{Y}_k(p)}$$

berechnet werden, wobei sinngemäß $m=2$, $n=1$ gewählt wird. Daraus folgt:

$$\frac{U_{k2}}{I_1} = \frac{(-1)^{1+2}\det \underset{\sim}{Y}_{12}(p)}{\det \underset{\sim}{Y}_k(p)} = \frac{-\det \underset{\sim}{Y}_{12}(p)}{\det \underset{\sim}{Y}_k(p)}$$ mit $\underset{\sim}{Y}_{12}(p) = -pC_{GS} - g_m$ und $\underset{\sim}{Y}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} + pC_{GS} & -pC_{GS} \\ -pC_{GS} - g_m & g_m + pC_L + pC_{GS} \end{bmatrix}$

laut der Angabe und Definition, die besagt, dass $\underset{\sim}{Y}_{nm}$ durch das Wegstreichen der n-ten Zeile (in diesem Fall ersten) und m-ten Spalte (hier zweiten) bestimmt wird. Da $\underset{\sim}{Y}_{12}(p) = -pC_{GS} - g_m$ eine Zahl (in diesem Spezialfall) ist, lautet ihre Determinante auch $\underline{\det \underset{\sim}{Y}_{12}(p) = -pC_{GS} - g_m}$. Die Determinante von $\underset{\sim}{Y}_k$ rechnet man bekannterweise, wie folgt:

$$\det \underset{\sim}{Y}_k = \left(\frac{1}{R} + pC_{GS}\right)(g_m + pC_L + pC_{GS}) - (-pC_{GS})(-pC_{GS} - g_m) = \frac{g_m}{R} + \frac{pC_L}{R} + \frac{pC_{GS}}{R} + \cancel{pC_{GS}g_m} + p^2C_{GS}C_L + \cancel{p^2C_{GS}^2} - \cancel{p^2C_{GS}^2} - \cancel{pC_{GS}g_m}$$

$$= C_{GS}C_L p^2 + \left(\frac{C_L + C_{GS}}{R}\right)p + \frac{g_m}{R}$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion, die die Gestalt $H(p) = \frac{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0}$ laut Angabe besitzen soll:

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{R}\cdot\frac{U_{k2}}{I_1} = \frac{-1}{R}\cdot\frac{-pC_{GS} - g_m}{C_{GS}C_Lp^2 + \frac{C_L + C_{GS}}{R}p + \frac{g_m}{R}} = \frac{+C_{GS}p + g_m}{C_{GS}C_LRp^2 + (C_L + C_{GS})p + g_m}}$$ mit $a_2 = 0$, $a_1 = +C_{GS}$, $a_0 = +g_m$, $b_2 = C_{GS}C_LR$, $b_1 = C_L + C_{GS}$, $b_0 = g_m$

b) Nun soll die eben berechnete Übertragungsfunktion faktorisiert werden, sogar auf die Form aus den Vorüberlegungen am Anfang dieser Musterlösung, also auf die Form:

$$H(p) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{p}{-q_i}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{p}{-p_i}\right)}$$

q_i sind die Nullstellen und p_i sind die Nullstellen des Nennerpolynoms, bzw. die Polstellen von $H(p)$, da für $p = q_i$ bspw. $H(q_i) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{q_i}{-q_i}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1 + \frac{p}{-p_i}\right)} = 0$ gilt, und für p_i analog. Da der Zähler ein Polynom ersten Grades ist, besitzt $H(p)$ nur eine Nullstelle und da der Nennerpolynom quadratisch ist, zwei Polstellen.

Damit reduziert sich die allgemeine faktorisierte Form für den vorliegenden Fall zu:

$$H(p)=\frac{\left(1+\frac{p}{-q_1}\right)}{\left(1+\frac{p}{-p_1}\right)\left(1+\frac{p}{-p_2}\right)}=\frac{1+\frac{p}{-q_1}}{1+p\left(\frac{-1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)+\frac{p^2}{p_1p_2}}\overset{!}{=}\frac{+g_m+C_{GS}p}{g_m+(C_L+C_{GS})p+C_{GS}C_LRp^2}$$

Um die bei a) berechnete und rechts geschriebene Übertragungsfunktion auf die linke Form zu bringen, soll zuerst der Bruch mit $\frac{1}{g_m}$ erweitert werden um die 1 im Zähler und Nenner zu erhalten Daraus ergibt sich:

$$H(p)=\frac{g_m+C_{GS}p}{g_m+(C_L+C_{GS})p+C_{GS}C_LRp^2}\cdot\frac{\frac{1}{g_m}}{\frac{1}{g_m}}=\frac{\left(1+\frac{p\cdot C_{GS}}{g_m}\right)}{1+\frac{C_L+C_{GS}}{g_m}p+\frac{C_{GS}C_LR}{g_m}p^2}=\frac{\left(1+\frac{p}{\frac{g_m}{C_{GS}}}\right)}{1+\frac{C_L+C_{GS}}{g_m}p+\frac{C_{GS}C_LR}{g_m}p^2}$$

Man kann dabei aus dem Zählerpolynom die Nullstelle direkt ablesen. Sie lautet $\boxed{q_1=\frac{-g_m}{C_{GS}}}$.

Um die Polstellen p_1, p_2 zu bestimmen, kann man mithilfe eines Koeffizientenvergleichs auf die Gleichungen

$$\frac{-1}{p_1}-\frac{1}{p_2}=-\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)\overset{!}{=}\frac{C_L+C_{GS}}{g_m}\quad,\quad\frac{1}{p_1p_2}=\frac{C_{GS}C_LR}{g_m}$$

kommen. Mit dem auch im Hinweis explizit gegebenen Zusammenhang $\left|\frac{1}{p_1}\right|\gg\left|\frac{1}{p_2}\right|$, kann man durch eine Näherung p_1 folgendermaßen bestimmen:

$$-\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)\approx\frac{-1}{p_1}\overset{!}{=}\frac{C_L+C_{GS}}{g_m}\Longrightarrow\boxed{p_1\approx\frac{-g_m}{C_L+C_{GS}}}$$

Mit der zweiten Gleichung erfolgt dann die Bestimmung von p_2:

$$\frac{1}{p_1p_2}=\frac{C_{GS}C_LR}{g_m}\Longleftrightarrow p_2=\frac{g_m}{p_1C_{GS}C_LR}\approx\frac{\cancel{g_m}}{\frac{-\cancel{g_m}}{C_L+C_{GS}}C_{GS}C_LR}=\frac{-C_L-C_{GS}}{C_{GS}C_LR}\Longrightarrow\boxed{p_2=-\frac{C_L+C_{GS}}{C_{GS}C_LR}}$$

Damit lautet die faktorisierte Form:

$$H(p)=\frac{\left(1+\frac{p}{g_m/C_{GS}}\right)}{\left(1+\frac{p}{\frac{g_m}{C_L+C_{GS}}}\right)\left(1+\frac{p}{\frac{C_L+C_{GS}}{C_{GS}C_LR}}\right)}$$

<u>Alternativ</u>: Könnte man nicht genau die darauf zu faktorisierende Form bestimmen und/oder auf die Idee der Erweiterung mit $\frac{1}{g_m}$ kommen, so könnte man mithilfe des im Hinweis gegebenen Gleichheit für Nenner-Polynom arbeiten. Man könnte die Nullstelle direkt bestimmen und dann wegen $b_0=g_m$, ~~g_m ...~~ die Gleichungen $-g_m\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\right)=C_L+C_{GS}$ und $\frac{g_m}{p_1p_2}=C_{GS}C_LR$ aufstellen. Der Rest der Berechnung läuft analog zu oben.

c) Jetzt ist für eine spezielle Dimensionierung die Übertragungsfunktion mit Zahlenwerten gegeben und dafür soll das Betrags-Bodediagramm gezeichnet werden. Der Hinweis besagt, dass es aus der Zeichnung ersichtlich sein soll, wie man $v(\omega)$ aus der gesamten Übertragungsfunktion konstruiert. Das geschieht wie in den Vorüberlegungen erklärt durch Superposition der Bodediagramme einzelner Faktoren.

Die gegebene Übertragungsfunktion lautet:

$$H(p)=\frac{\left(1+\frac{p}{1000s^{-1}}\right)}{\left(1+\frac{p}{10s^{-1}}\right)\left(1+\frac{p}{100s^{-1}}\right)}$$

Damit kann der Betrags-Bodediagramm $v(\omega)$ durch das Einsetzen von $p=j\omega$ mit der Vorschrift $v(\omega)=20\log|H(j\omega)|dB$ wie folgt berechnet und in elementare Teile (Summanden), für die die Bodediagramme einfach zu zeichnen sind, zerlegt werden.

$$v(\omega)=20\log|H(j\omega)|dB=20\log\left|\frac{\left(1+\frac{j\omega}{1000s^{-1}}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{10s^{-1}}\right)\left(1+\frac{j\omega}{100s^{-1}}\right)}\right|dB=20\log\left|1+\frac{j\omega}{1000s^{-1}}\right|dB-20\log\left|1+\frac{j\omega}{10s^{-1}}\right|dB-20\log\left|1+\frac{j\omega}{100s^{-1}}\right|dB$$

$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}},\ \log a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log a$

$$=20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2}\right)dB-20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{10s^{-1}}\right)^2}\right)dB-20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{100s^{-1}}\right)^2}\right)dB=10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\right)dB-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{10s^{-1}}\right)^2\right)dB$$

$$-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{100s^{-1}}\right)^2\right)dB$$

Dadurch wird $v(\omega)$ in drei Summanden zerlegt, aus den durch Superposition das Betrags-Bodediagramm konstruiert werden soll. Diese drei Summanden sollen im Folgenden näher betrachtet werden.
Die Summanden, die die Bodediagramme konstruieren, werden bei ST2 immer angenähert mit stückweise linearen Ästen gezeichnet. Für den ersten Summand $10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\right)dB$ wird die Näherung wie folgt gemacht:

- Für $\omega<1000s^{-1}$ wird $\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2$ gegen 1 wegen $\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\ll 1$ vernachlässigt. Daraus folgt für den Summand

$$10\log(1)dB=0dB$$

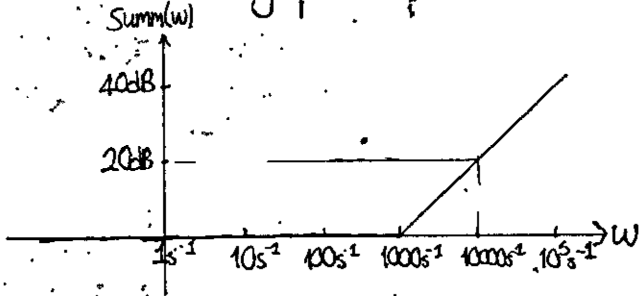
- Für $\omega>1000s^{-1}$ wird 1 gegen $\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2$ wegen $\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\gg 1$ vernachlässigt. Dann gilt:

$$10\log\left(\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\right)dB=20\log\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)dB$$

→ Dieser entspricht einen 20dB-Anstieg pro Dekade, da gilt $20\log\left(\frac{1000s^{-1}}{1000s^{-1}}\right)=0$, $20\log\left(\frac{10000s^{-1}}{1000s^{-1}}\right)=20$ usw

→ Für diesen Summand sieht das Bodediagramm mathematisch und graphisch so aus:

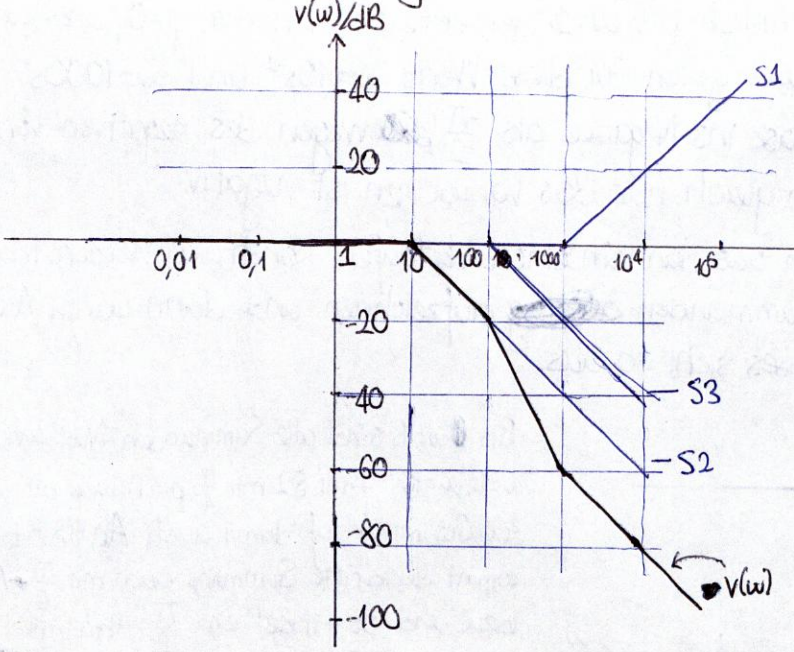
$$10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)^2\right)dB=\begin{cases}0, & \omega<1000s^{-1}\\ 20\log\left(\frac{\omega}{1000s^{-1}}\right)dB, & \omega>1000s^{-1}\end{cases}$$



- Da die anderen beiden Summanden die gleiche Form haben, funktioniert die Näherung ganz analog bei den Beim zweiten Summand ist der Übergang zwischen den beiden Bereichen an $\omega=10s^{-1}$ und beim dritten Summand an $\omega=100s^{-1}$. Außerdem betrachtet man bei diesen Summanden 2 und 3 einen 20dB pro Dekade Abfall wegen des negativen Vorzeichens, da für bspw. den zweiten Summand:

$$-10\log\left(\left(\frac{\omega}{10s^{-1}}\right)^2\right)dB=-20\log\left(\frac{\omega}{10s^{-1}}\right)dB,\quad -20\log\left(\frac{10s^{-1}}{10s^{-1}}\right)dB=0,\quad -20\log\left(\frac{100s^{-1}}{10s^{-1}}\right)dB=-20dB,\ \text{usw}$$

gilt. Damit kann man die Bodediagramme der drei Summanden auf ein gemeinsames Koordinatensystem eintragen und durch Addition dieser Kurven das Betrags-Bodediagramm der Übertragungsfunktion zeichnen. Dieses sieht wie folgt aus:



Bis $10s^{-1}$ sind alle Summanden Null. Zwischen $10s^{-1}$ und $100s^{-1}$ gibt es nur ein 20dB pro Dekade Abfall. Zwischen $100s^{-1}$ und $1000s^{-1}$ kommt noch ein 20dB-Abfall dazu und man bekommt 40dB-Abfall pro Dekade. Ab $1000s^{-1}$ kommt ein 20dB-Aufstieg hinzu und kompensiert eins von beiden negativen Summanden. Damit bleibt nur ein 20dB-Abfall übrig.

d) Um das Phasen-Bodediagramm zu zeichnen, soll man wie bei den Vorüberlegungen angedeutet, wieder die Übertragungsfunktion zerlegen. Dann können die drei Summanden näher betrachtet werden. Die Zerlegung erfolgt wie folgt:

$$\varphi(H(jw)) = \varphi\left(\frac{\left(1+\frac{jw}{1000s^{-1}}\right)}{\left(1+\frac{jw}{10s^{-1}}\right)\left(1+\frac{jw}{100s^{-1}}\right)}\right) = \varphi\left(1+\frac{jw}{1000s^{-1}}\right) - \varphi\left(1+\frac{jw}{10s^{-1}}\right) - \varphi\left(1+\frac{jw}{100s^{-1}}\right)$$

Da der Realteil des Arguments aller Summanden 1 beträgt und damit positiv ist, kann man die Phase der Argumente nach der Vorschrift aus den Vorüberlegungen durch $\arctan\left(\frac{Im(S)}{Re(S)}\right)$ berechnen. Also gilt:

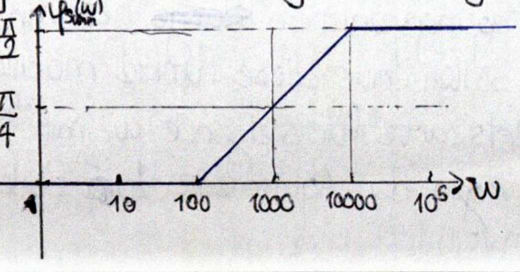
$$\varphi(w) = \arctan\left(\frac{\frac{w}{1000s^{-1}}}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{w}{10s^{-1}}}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{w}{100s^{-1}}}{1}\right) = \arctan\left(\frac{w}{1000s^{-1}}\right) - \arctan\left(\frac{w}{10s^{-1}}\right) - \arctan\left(\frac{w}{100s^{-1}}\right)$$

Beim Phasen-Bodediagramm werden die Verläufe wie bei Beträgen durch stückweise lineare Kurven angenähert. Diese Näherung wird folgendermaßen durchgeführt (bei Summand 1):

- Für $w < \frac{1000s^{-1}}{10} = 100s^{-1}$ wird angenommen $\frac{w}{1000s^{-1}} \ll 1$ und damit wird der Quotient $\frac{w}{1000s^{-1}}$ zu Null gesetzt. Damit folgt für den ersten Summand: $\arctan(0) = 0$
- Für $w > 1000s^{-1} \cdot 10 = 10000s^{-1}$ wird angenommen $\frac{w}{1000s^{-1}} \gg 1$ und der Quotient $\frac{w}{1000s^{-1}}$ wird zu (in diesem Fall wegen positivem Nenner) Unendlichen gesetzt. Damit gilt: $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
- Dazwischen werden die Endpunkte beider Bereiche $\left(\varphi(100s^{-1}) = 0,\ \varphi(10000s^{-1}) = \frac{\pi}{2}\right)$ mit einer Gerade verbindet. Diese Gerade wird mit $\frac{\pi}{4}\left(\log\left(\frac{w}{1000s^{-1}}\right)+1\right)$ (in diesem Fall) beschrieben.

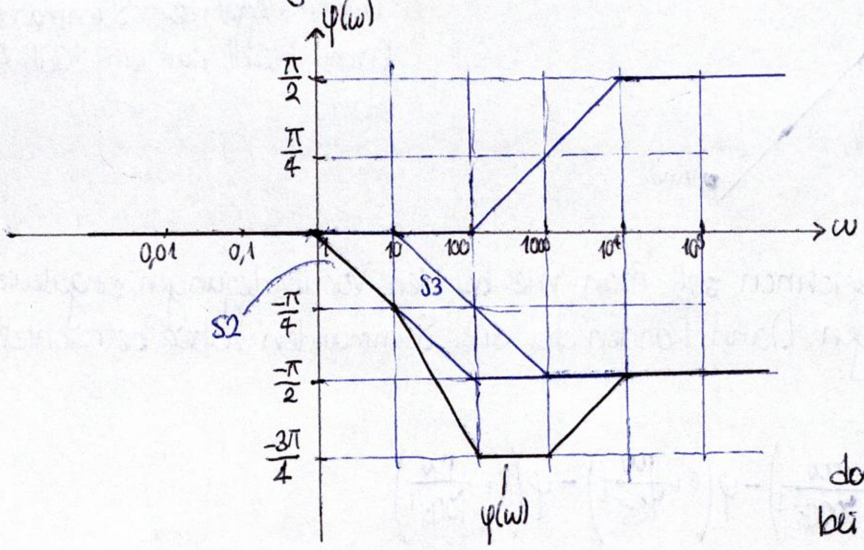
→ Für diesen Summand kann das Phasen-Bodediagramm wie folgt mathematisch und graphisch dargestellt werden:

$$\varphi_{Summ}(w) = \begin{cases} 0 & , w < 100s^{-1} \\ \frac{\pi}{4}\left[\log\left(\frac{w}{1000s^{-1}}\right)+1\right] & , 100s^{-1} < w < 10000s^{-1} \\ \frac{\pi}{2} & , 10000s^{-1} < w \end{cases}$$



Die anderen beiden Summanden sind wiederum von der gleichen Gestalt wie der eben betrachtete Summand 1. Beim zweiten Summand gilt natürlich bis $\omega = 1s^{-1}$ der erste Bereich mit $\varphi = 0$, und ab $\omega = 100s^{-1}$ gilt $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Beim dritten Summand gelten für diese Werte $\omega = 10s^{-1}$ und $\omega = 1000s^{-1}$. Bei diesen beiden Summanden geht die Phase ins Negative bis $\frac{-\pi}{2}$ wegen des negativen Vorzeichens. Die Durchführung der Näherung bleibt also gleich nur das Vorzeichen ist negativ.

Laut Hinweis soll wieder das Bodediagramm aus den einzelnen Verläufen konstruiert werden. Man soll also die einzelnen Phasenverläufe für alle Summanden aufzeichnen und dann durch Addition das Phasen-Bodediagramm bestimmen. Dieses sieht so aus:

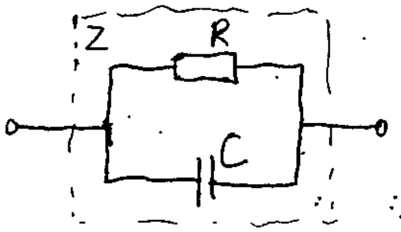


Bis $\omega = 1s^{-1}$ sind alle Summanden Null. Zwischen $\omega = 1s^{-1}, \omega = 10s^{-1}$ fällt S2 mit $\frac{\pi}{4}$ pro Dekade ab und der Gesamtverlauf damit auch. Ab $10s^{-1}$ bis $100s^{-1}$ kommt der dritte Summand auch mit $\frac{\pi}{4}$-Abstieg dazu und es findet ein $\frac{\pi}{2}$-Abfall pro Dekade statt bis $\frac{-3\pi}{4}$. Ab $100s^{-1}$ erreicht S2 $\varphi = \frac{-\pi}{2}$ und fällt nicht mehr. Außerdem steigt S1 jetzt mit $\frac{\pi}{4}$-Aufstieg und kompensiert den übrig gebliebenen $\frac{\pi}{4}$-Abstieg. Damit bleibt das Bodediagramm zwischen $100s^{-1}$ und $1000s^{-1}$ bei $\frac{-3\pi}{4}$ konstant. Ab $1000s^{-1}$ ist S3 auch konstant bei $\frac{-\pi}{2}$ und sinkt nicht mehr. S1 steigt aber weiter und damit findet ein $\frac{\pi}{4}$-Abstieg bis $\frac{-\pi}{2}$ statt. Ab $10000s^{-1}$ bleibt S1 auch konstant (bei $\varphi = \frac{+\pi}{2}$). Deshalb bleibt die gesamte Phase auch bei $\varphi = \frac{-\pi}{2}$ konstant.

e) Das vorliegende Filterverhalten kann mit einem Vergleich mit der Zusammenfassung 11 oder in der Prüfung mit der Formelsammlung bestimmt werden. Es ist aber auch intuitiv bestimmbar. Für das Filterverhalten relevantes Bodediagramm ist das von Betrag. Dabei kann man merken, dass der Betrag für steigende Frequenzen immer kleiner wird. Das heißt, dass bei dem Eingangssignal, der der gegebenen Schaltung, die durch die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ beschrieben wird, eingespeist wird, die hohen Frequenzen unterdrückt werden. Deswegen liegt ein <u>Tiefpassverhalten</u> vor.

<u>A2)</u> Im Rahmen dieser Aufgabe soll man sich jetzt mit einem anderen Werkzeug, um den Frequenzgang darzustellen, auseinandersetzen, nämlich Ortskurven. Die Ortskurven sind äquivalent zu Bodediagrammen, sie stellen nur nicht mehr den Betrag und die Phase, sondern den Real- und Imaginärteil einer Übertragungsfunktion dar. Um den Verlauf der Real- und Imaginärteil exakt in der komplexen Ebene zu plotten, soll man eigentlich numerische Werkzeuge wie MATLAB benutzen. Jedoch im Rahmen der Vorlesung ST2 ist nur die qualitative Darstellung des Frequenzgangs relevant. Es muss also lediglich für einige Frequenzen der Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion bestimmt und in die komplexe Ebene eingetragen werden. Dann sollen nur diese Punkte möglichst glatt miteinander verbunden und die Richtung der Ortskurve für steigende ω mit Pfeilen angedeutet werden. Aus einer Ortskurve kann man wegen der Äquivalenz zu den Bodediagrammen viele Systemeigenschaften ablesen, wie wieder Systemstabilität usw.

a) Es liegt eine verlustbehaftete Kapazität, bestehend aus der Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands ($R>0$) und einer linearen Kapazität mit $C>0$, vor. Dafür soll zuerst die Admittanz, also der komplexe Leitwert bestimmt werden. Parallel geschaltete Leitwerte sind einfach durch Addition zusammenzufassen. Für die folgende Schaltung



soll also nur $Y(\omega)=\frac{1}{Z(\omega)}$ wie bekannt aus dem Leitwert eines ohmschen Widerstands $Y_1=\frac{1}{R}$ und einer Kapazität $Y_2=j\omega C$ konstruiert werden. Damit gilt:

$$\boxed{Y(\omega)=Y_1+Y_2=\frac{1}{R}+j\omega C}$$

Da eine Ortskurve den Real- und Imaginärteil einer (in diesem Fall) Zweipolfunktion darstellt, ist es zweckmäßig die Zweipolfunktion in Real- und Imaginärteil zu zerlegen. In diesem Fall sind sie aber bereits in dieser Form und dieser Schritt entfällt.

b) Nun soll die Ortskurve gezeichnet werden. Dafür ist es sinnvoll eine kleine Wertetabelle für $\omega=0, \omega\to\infty$ und $\omega=\omega_0$ (Resonanzfrequenz, für die $Im(\omega_0)=0$ gilt), eventuell auch für einige andere Kreisfrequenzen aufzustellen. Es gilt für Real- und Imaginärteil Folgendes:

$Re(Y(\omega))=\frac{1}{R}$, $Im(Y(\omega))=\omega C$.

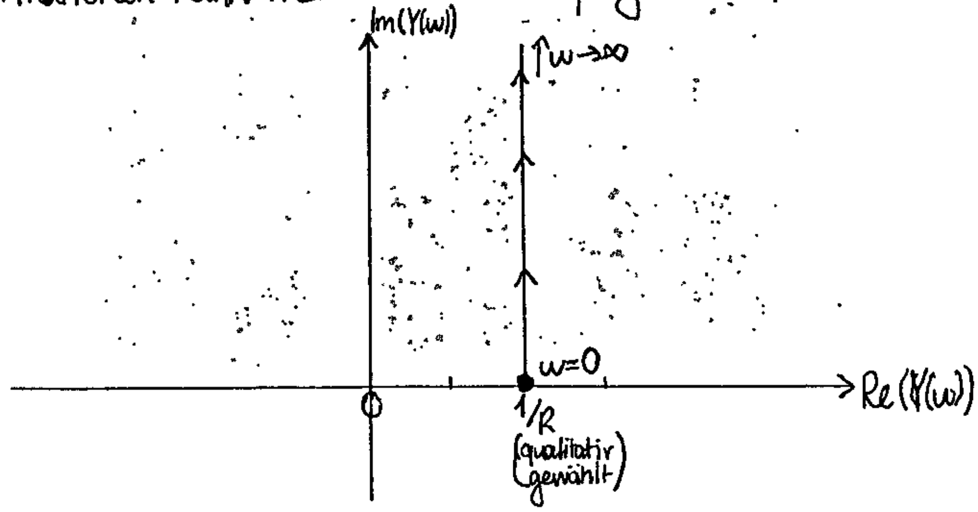
Damit fällt leider die Resonanzfrequenz mit $\omega=\omega_0=0$ zusammen und man soll eigentlich einen anderen Zwischenwert bestimmen. In diesem Fall ist es aber nicht nötig, da der Realteil unabhängig von ω ist und damit konstant bleibt. Das heißt auch, dass die Ortskurve ein Strahl sein soll. Für die Wertetabelle gilt:

- $\underline{\omega=0}$: $Re=\frac{1}{R}$, $Im=0$
- $\omega\to\infty$: $Re=\frac{1}{R}$, $Im=+\infty$

$\Rightarrow$

	Re	Im
$\omega=0$	$1/R$	0
$\omega\to\infty$	$1/R$	∞

Mit diesen Informationen kann man die Ortskurve folgendermaßen konstruieren:



Beim Zeichnen der Ortskurven soll man unbedingt auf die vollständige Beschriftung achten. Im der Angabe steht explizit, dass die Punkte, für die $\omega=0$ bzw. $\omega\to\infty$ gelten, gekennzeichnet werden sollen. Die Richtung für steigende ω soll auch mit Pfeilen angedeutet werden. Alle dieser Beschriftungen werden oben eingetragen und dürfen in der Prüfung auch nicht vergessen werden.

c) Der komplexe Widerstand kann durch die Parallelsumme beider Impedanzen $Z_1=R$, $Z_2=\frac{1}{j\omega C}$ berechnet werden, da die parallel verschalteten Widerstände durch die Parallelsumme zusammengefasst werden. Statt aber $Z(\omega)=Z_1 \| Z_2=\frac{Z_1 Z_2}{Z_1+Z_2}$ zu berechnen, kann man auf die Tatsache, dass die Impedanz reziprok zur Admittanz ist, aufgreifen. Da in Teilaufgabe a) die Admittanz $Y(\omega)$ schon berechnet wurde, kann man direkt mit $Z(\omega)=\frac{1}{Y(\omega)}$ auf das Ergebnis kommen. Es gilt also:

$$\boxed{Z(\omega)=\frac{1}{Y(\omega)}=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C}}$$

Diese Darstellung ist aber wie bei a) angedeutet ungeeignet um die Ortskurve zu zeichnen, da der Real- und Imaginärteil nicht direkt ablesbar sind. Es ist auch in der Aufgabenstellung explizit angefordert, dass man die Zerlegung von $Z(\omega)$ auf Real- und Imaginärteil durchführen und diese angeben soll. Für diese Zerlegung ist es immer notwendig, dass im Nenner nichts Komplexes (also j nicht) vorkommt. Dieses schafft man mit der Erweiterung des Bruchs mit dem Komplex Konjugierten des Nenners. Die Berechnung läuft wie folgt:

$$Z(\omega)=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\omega C}=\frac{1}{\frac{1+j\omega RC}{R}}=\frac{R}{1+j\omega RC}\,{\scriptstyle (1-j\omega RC)}=\frac{R(1-j\omega RC)}{1+\omega^2R^2C^2}=\frac{R}{1+\omega^2R^2C^2}+j\cdot\frac{-\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}$$

$$\Rightarrow Re(Z(\omega))=\frac{R}{1+\omega^2R^2C^2}\quad,\ Im(Z(\omega))=\frac{-\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}$$

d) Um die Ortskurve zu zeichnen, soll man wieder eine Wertetabelle aufstellen. Es ist wiederum so, dass $\omega_0=0$ gilt (Imaginärteil zu Null). In diesem Fall ist aber die Bestimmung eines Zwischenwerts erforderlich, da diesmal der Verlauf der Ortskurve nicht direkt aus Real- und Imaginärteil ablesbar ist. Es ist sinnvoll einen Zwischenwert zu wählen, bei dem sich in Real- und Imaginärteil vieles kürzt. In diesem Fall ist er offensichtlich $\omega=\frac{1}{RC}$, da dann $\omega^2R^2C^2$-Terme im Nenner sich zu 1 kürzen. Nun kann man die Wertetabelle aufstellen:

- $\underline{\omega=0}$: $Re=R$, $Im=0$
- $\underline{\omega=\frac{1}{RC}}$: $Re=\frac{R}{1+1}=\frac{R}{2}$, $Im=\frac{-\frac{1}{RC}\cdot R^2C}{1+1}=\frac{-R}{2}$
- $\underline{\omega\to\infty}$: $\lim\limits_{\omega\to\infty} Re=\frac{R}{\infty}=0$, $\lim\limits_{\omega\to\infty} Im=\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{-\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}=0$

Da der Grad des Nennerpolynoms größer ist, steigt der Nenner schneller, der Bruch wird zu $\frac{a}{\infty}\to 0$.

$\Rightarrow$

	Re	Im
$\omega=0$	R	0
$\omega=\frac{1}{RC}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{-R}{2}$
$\omega\to\infty$	0	0

Wenn man diese drei Punkte in die komplexe Ebene einträgt und glatt verbindet, so merkt man, dass die Ortskurve eine Halbkreisform hat. Man kann tatsächlich auch mathematisch zeigen, dass diese Ortskurve ein Halbkreis ist. Es ist außerdem eine Merkregel, dass eine Zweipolfunktion mit einer Halbgerade* als Ortskurve eine invertierte Zweipolfunktion ($Y=\frac{1}{Z}$) mit einem Halbkreis als Ortskurve hat. Daher sieht die Ortskurve von $Z(\omega)$ folgendermaßen aus:

* nicht durch den Ursprung!