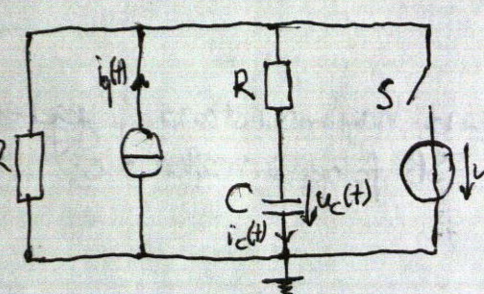
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 2

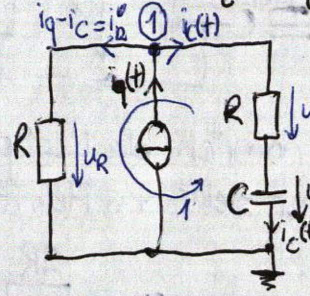
A1) In dieser Aufgabe soll der zeitliche Verlauf der Zustandsgröße einer Schaltung mit verschiedenen Erregungskombinationen analytisch bestimmt werden.

a) Eine Zustandsvariable hat im Allgemeinen die Eigenschaft den Zustand einer Schaltung zu speichern. Diese ist dann gegeben, wenn eine Größe Ausgang eines Integrals ist, also das Gedächtnis der Schaltung darstellt. Außerdem wissen wir, dass für Kapazitäten und Induktivitäten die Zusammenhänge $i_C = C \cdot \dot{u}_C$ und $u_L = L \cdot \dot{i}_L$ gelten. Integriert man diese Gleichungen, so merkt man, dass bei Kapazitäten die Spannung u_C und bei Induktivitäten der Strom i_L die Zustandsvariable ist. Da in unserer Schaltung eine Kapazität vorhanden ist, ist die Zustandsvariable $\underline{u_C(t)}$.

b) Um die Zustandsgleichung aufzustellen, nehmen wir KCL, KVL und Bauelementegleichungen zur Hilfe und am Ende versuchen wir eine Gleichung von der Form $\dot{u}_C(t) = \frac{-1}{\tau} u_C(t) + \frac{1}{\tau} u_{C\infty}$ zu bekommen.



Schalter ist offen, so: $\equiv$



KCL bei ①: $i_R + i_C - i_q = 0 \Rightarrow i_R = i_q - i_C$

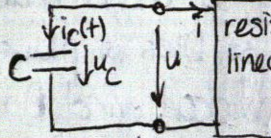
Ohmsches Gesetz: $u_R = R \cdot i_R = R(i_q - i_C)$; $u = i_C \cdot R$

KVL bei Masche 1: $R(i_q - i_C) - u_C - i_C R = 0$
$\Rightarrow R i_q - 2R i_C = u_C$ (1)

Kapazität: $i_C = C \cdot \dot{u}_C$ (2) $\Rightarrow$ (1) und (2): $R i_q - 2RC\dot{u}_C = u_C \Rightarrow 2RC\dot{u}_C = -u_C + R i_q \;\Big|\; \frac{1}{2RC}$

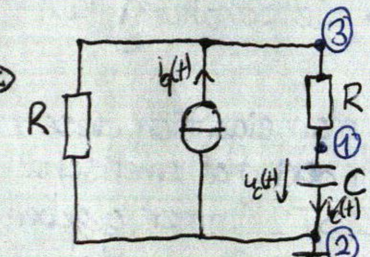
$$\Rightarrow \dot{u}_C(t) = \underbrace{\frac{-1}{2RC}}_{\tau^{-1}} \cdot u_C(t) + \frac{1}{2RC} \cdot \underbrace{R \cdot i_q(t)}_{u_{C\infty}}$$

c) Nun sollen wir den resistiven Teil der gegebenen Schaltung geeignet ersetzen. Dafür sollen wir aber das Schaltbild mit der Kapazität, geschaltet an der äußeren Klemme des resistiven Teils (Eintors) zeichnen. Dafür sollen wir die Knoten nummerieren und von der externen Kapazität ausgehend die Schaltung auf die Form

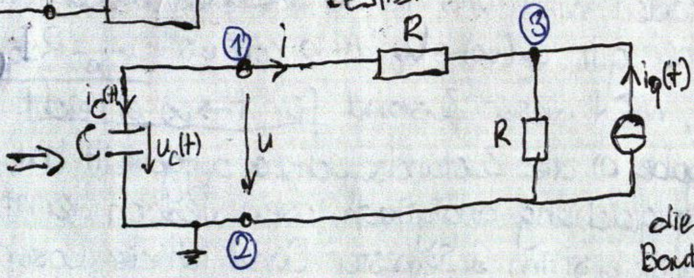


bringen. Also ist das geeignete ESB das Helmholtz/Thevenin ESB, da die Schaltung als Reaktanz eine Kapazität besitzt.

$\Rightarrow$

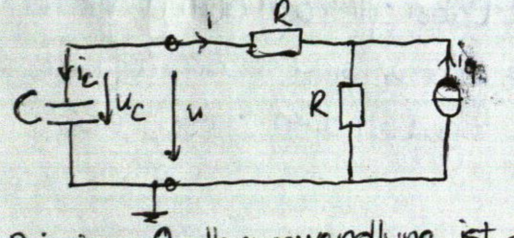


$\Longrightarrow$

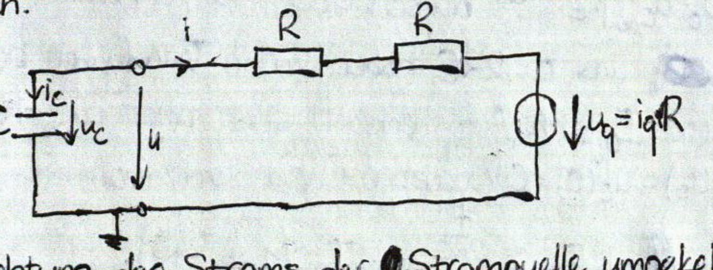


→ Nachdem man die Kapazität zeichnet, sieht man, dass zwischen ① und ③ ein Widerstand R liegt und zeichnet diesen. Dann zeichnet man auch die parallel verschalteten restlichen Bauteile zwischen ③ und ② ein. So entsteht linksliegende Skizze.

Da es einfacher ist bei einer Schaltung mit Spannungsquellen statt Stromquellen ein Helmholtz/Thevenin ESB anzufertigen, führen wir mithilfe des der Stromquelle $i_q(t)$ parallel geschalteten Widerstands R eine Quellenumwandlung durch.

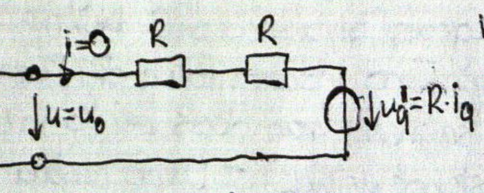


$\equiv$



→ Bei einer Quellenumwandlung ist die Richtung des Stroms der Stromquelle umgekehrt zur Spannungsrichtung der Spannungsquelle!!!

Nun kann die Vorgehensweise um die Leerlaufspannung U_0 und Innenwiderstand R_i zu bestimmen, die in der Zusammenfassung 2 bzw bei ST1 vorgestellt wird, verwendet werden. Dafür setzen wir die Kapazität mit einem Leerlauf ($i=0$) und bestimmen $u=U_0$ in Abhängigkeit von u_q (bzw. i_q) und Bauelemente-größen.

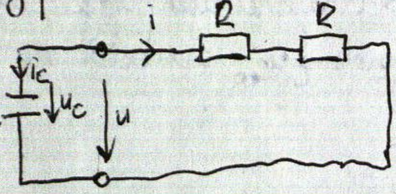
$\Rightarrow$ 

$\equiv$ Wegen $i=0$ fallen die Widerstände weg.

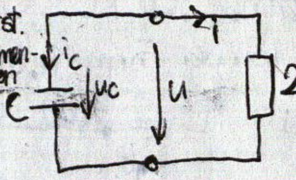
$\Rightarrow U_0 = R\cdot i_q$

(Falls die Quellenumwandlung nicht durchgeführt wäre, würde man auf das gleiche Ergebnis kommen.)

Jetzt soll der Innenwiderstand bestimmt werden, indem die Spannungsquelle mit einem Kurzschluss (Null-Spg.quelle) ersetzt und $R_i = \frac{u}{i}$ berechnet wird.

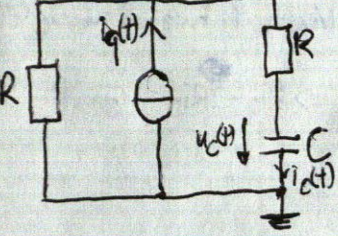
$\Rightarrow$ 

Widerst. zusammenfassen $\equiv$

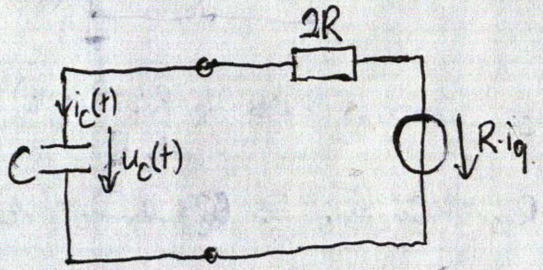


$\Rightarrow R_i = \frac{u}{i} = 2R$

Also sind die beiden Parameter nämlich die LL-Spannung u_0 und Innenwiderstand R_i gegeben durch $\underline{U_0 = R\cdot i_q}$ und $\underline{R_i = 2R}$. Daher sieht das Helmholtz/Thevénin-ESB folgendermaßen aus:



$\equiv$



d) Die Zeitkonstante τ ist entweder an der Zustandsgleichung oder bei dem obigen ESB durch die Gleichung $\tau = C\cdot R_i$ ablesbar. Daher gilt es: $\tau = C\cdot 2R = 2RC$.
Außerdem ist es bekannt, dass für $\tau > 0$ eine Schaltung stabil und für $\tau < 0$ instabil ist. Da $R>0$ und $C>0$ gelten, gilt $\tau = 2CR > 0$ und daher ist die gegebene Schaltung stabil.

e) Greift man auf Zusammenfassung 2 bzw Skript ST2 auf, so merkt man, dass der Gleichgewichtszustand $u_{C\infty}$ durch die Leerlaufspannung U_0 gegeben ist. Dies ist plausibel, da für $t\to\infty$ die Kapazität vollständig geladen wird und als Leerlauf wirken wird. Dann fließt natürlich kein Strom über R_i und daher gilt $u_c(\infty) = U_0$. Also gilt es $\underline{u_{C\infty} = R\cdot I_{q0}}$. Da die Schaltung laut Teilaufgabe d) stabil ist, wird dieser Zustand $\underline{\text{für } t\to\infty \text{ erreicht}}$.

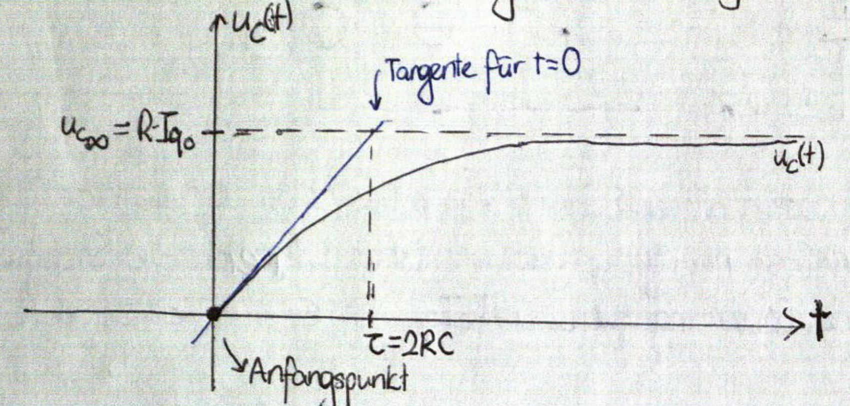
f) Nachdem man in Teilaufgabe b) die Zustandsgleichung aufgestellt hat, kann man eigentlich diese relativ einfache Differentialgleichung analytisch lösen. Jedoch lernt man das mathemetische Hintergrundwissen dafür erst im 3. Semester. Daher ist die Lösung bei ST2 immer gegeben, bzw. aus der Formelsammlung zu entnehmen. Man soll dabei lediglich einige Parameter aus dem geeigneten (in diesem Fall Helmholtz/Thevénin) ESB bestimmen, um die Lösung für $u_C(t)$ mittels $u_C(t) = u_{C\infty} + [u_0 - u_{C\infty}]\cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ aufschreiben zu können.
$u_{C\infty} = R\cdot i_{q\infty}$ und $\tau = 2RC$ haben wir in Teilaufgaben bestimmt. Dabei gilt nach dem gegebenen Verlauf $i_{q\infty} = i_q(\infty) = I_{q0}$ (siehe Aufgabenblatt) und daher $u_{C\infty} = R\cdot I_{q0}$. t_0 und u_0 sind in der Aufgabenstellung durch $u_0 = u_C(t_0) = u_C(0) = 0V$ gegeben. Daher kann man die Lösung folgendermaßen aufschreiben:

$$\underline{u_C(t) = R\cdot I_{q0} - R\cdot I_{q0}\cdot e^{-\frac{t}{2RC}} = R\cdot I_{q0}\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right)}.$$

Als kleines Test kann man den Anfangswert $t=0$ einsetzen und überprüfen, ob $u_C(0)=0$ gewährleistet ist.

Das ist aber der Fall.

g) Da wir in diesem Fall konstante Erregung haben, gibt es keine verschiedene Intervalle, die man betrachten muss. Man soll lediglich die Lösung aus letzter Teilaufgabe in t-u_C-Ebene skizzieren.



→ In der Zeichnung ist es sinnvoll die Tangente für t_0 auch als Hilfskonstruktion einzutragen. Da R, C und I_{q0} zahlenmäßig unbekannt sind ist bei dieser Zeichnung die Achsenskalierung beliebig. Nur die Form der $-e^{-t}$-Verlauf soll richtig gezeichnet werden.

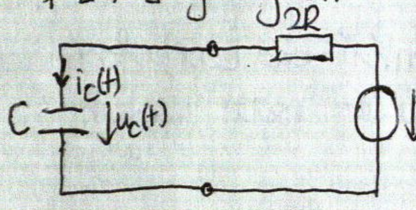
h) Ab dieser Teilaufgabe haben wir neben der konstanten Erregung durch die Stromquelle $i_q(t)$ eine zusätzliche abschnittsweise konstante Erregung $u_q(t)$, die im Gegensatz zu i_q, die am $t=0$ eingeschaltet wird, am Zeitpunkt $t=T$ eingeschaltet wird. Deswegen haben wir insgesamt eine stückweise konstante Erregung, und wir sollen die Lösung für $u_C(t)$ für verschiedene Zeitintervalle berechnen. Dabei ist es sinnvoll zuerst diese Intervalle zu bestimmen. Vom Zeitpunkt $t=0$ bis $t=T$ haben wir nur die konstante Erregung $i_q(t)=I_{q0}$. Ab $t=T$ sind beide Erregungen eingeschaltet, aber ab $t=2T$ ändert $u_q(t)$ ihren Wert. Deswegen ist das zweite Intervall zwischen $t=T$ und $t=2T$. Danach findet keine Änderung mehr statt, und das dritte Intervall ergibt sich zu $I_3=[2T,\infty)$. Zusammengefasst:

$I_1=[0,T]$, $I_2=[T,2T]$, $I_3=[2T,\infty)$.

<u>Anmerkung:</u> Die Intervallgrenzen kann man in beide Intervalle einfügen, da die Zustandsgröße $u_C(t)$ stetig sein soll (siehe Zusammenfassung 1).

i) Bei Schaltungen mit abschnittsweise konstanter Erregung, soll man nur die verschiedenen Intervalle mit konstanter Erregung betrachten und wie beim ersten Teil dieser Aufgabe vorgehen. Da das erste Intervall nur die konstante Erregung $i_q(t)=I_0$ beinhaltet und völlig äquivalent zur im ersten Teil behandelten Schaltung ist, soll man hier nichts Neues machen. Sowohl das Helmholtz/Thevénin ESB als auch die Lösung sind gleich. Allerdings muss man beachten, dass diese Lösung nur für Zeiten $t\in I_1=[0,T]$ gültig ist.

⇒ ESB:



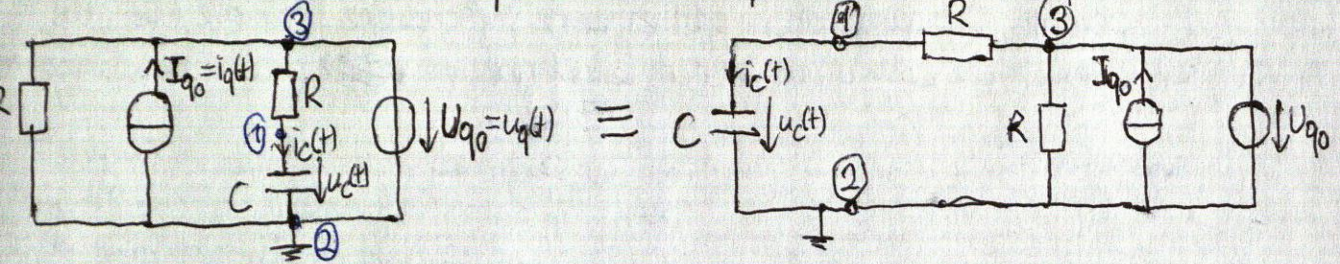
$u_C(t)=R\cdot I_{q0}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{2RC}}\right)$, $t\in[0,T]$.

j) Der Wert $u_C(T)$ an der Intervallgrenze ist wichtig, da dieser wegen Stetigkeit von $u_C(t)$ dem Anfangswert vom Intervall $I_2=[T,2T]$ entspricht. Um $u_C(T)$ zu bestimmen muss man lediglich $t=T$ in die Lösung vom Intervall I_1 einsetzen:

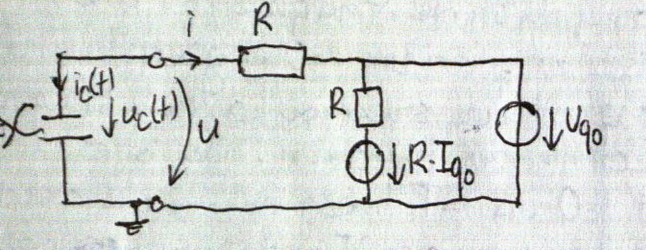
$$\underline{u_C(T)=R\cdot I_{q0}\cdot\left(1-e^{\frac{-T}{2RC}}\right)}.$$

k) Nun soll man die weiteren zwei Teilintervalle betrachten, um den vollständigen zeitlichen Verlauf von u_C zu bestimmen. Man geht dabei wieder wie im ersten Teil der Aufgabe vor. Dabei gibt es nur die Kapazität als Reaktanz und daher ändert sich die Zustandsgröße nicht. Außerdem ist das Aufstellen der Zustandsgleichung nicht zwingend erforderlich und fällt gemäß Aufgabenstellung aus. Man muss deswegen zuerst das Helmholtz/Thevénin ESB der Schaltung zeichnen:

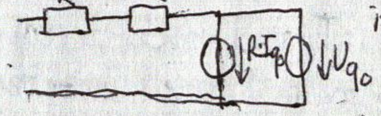
Zunächst ist wieder die Schaltform mit der Kapazität als externes Bauteil zu zeichnen:



Dabei erleichtert wieder die Nummerierung der Knoten diesen Schritt. Man muss dabei auf die Richtung der Quellenpfeile beachten. Bevor man die Leerlaufspannung U_0 bestimmt, ist es hilfreich die Stromquelle I_{q0} mit einem parallelen Leitwert $G=\frac{1}{R}$ zu einer Spannungsquelle $u=R\cdot I_{q0}$ mit einem Widerstand R in Reihe umzuwandeln.

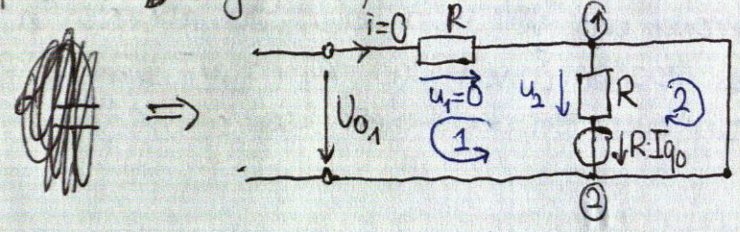


Dabei soll man beachten, dass die Quelle $R\cdot I_{q0}$ und der Widerstand R in Reihe dazu, zusammen parallel zur Spannungsquelle U_{q0} geschaltet ist, also nicht die Quellen parallel zueinander und dann in Reihe zu R. Also diese Schaltung:



ist falsch.

Nachdem wir die obige Schaltung gezeichnet haben, können wir die LL-Spannung bestimmen. Wir haben aber diesmal zwei Erregungsquellen und deswegen sollen wir die sogenannte Superpositionsprinzip anwenden. D.h. dass man beide Quellen zuerst einzeln betrachten soll, indem man jeweils die Andere zu Null setzt, und dann sich ergebende LL-Spannungen addiert um die gesamte LL-Spannung zu bestimmen. Ersetzt man zuerst die Spannungsquelle U_{q0} mit einem Kurzschluss, so erhält man das nachfolgende ESB und die LL-Spg. U_{0_1} für dieses ergibt sich, indem man $i=0$, also am Tor einen Leerlauf einsetzt.

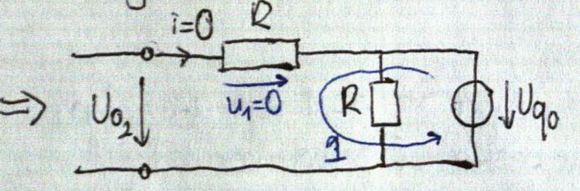


Ohmsches Ges.: $u_1=R\cdot 0=0$ KVL bei 2: $-u_2-R\cdot I_{q0}=0$ (2)

KVL bei 1: $U_{0_1}-R\cdot I_{q0}-u_2=0$ (1)

(1) und (2): $\underline{U_{0_1}=0}$.

Nun soll die Quelle $R\cdot I_{q0}$ zu Null gesetzt, also mit KS ersetzt werden. Um die Leerlaufspannung U_{0_2} dieses Systems zu berechnen, soll wieder das Tor mit einem Leerlauf ersetzt werden:



Ohmsches Ges: $u_1=R\cdot 0=0$

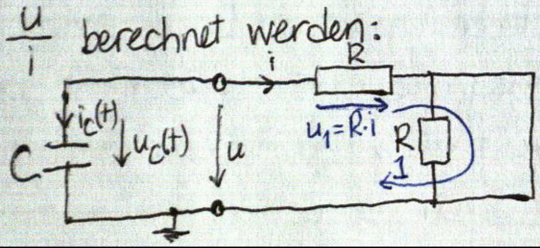
KVL bei 1: $U_{0_2}-U_{q0}=0$

$\Rightarrow \underline{U_{0_2}=U_{q0}}$.

Überlagert man diese Ergebnisse, so bekommt man die LL-Spannung U_0 als $U_0=U_{0_1}+U_{0_2}=0+U_{q0}=U_{q0}$.

$\Rightarrow \underline{U_0=U_{q0}}$

Um den Innenwiderstand zu bestimmen, sollen die beiden Quellen auf Null gesetzt und $R=\frac{u}{i}$ berechnet werden:



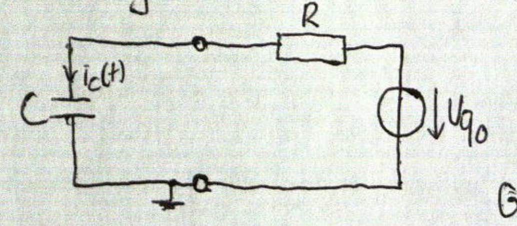
Ohmsches Gesetz: $u_1=R\cdot i$ (1)

KVL bei 1: $-u+u_1=0$ (2)

(1) in (2): $u=R\cdot i$

$\Rightarrow R_i=\frac{u}{i}=R \Rightarrow \underline{R_i=R}$.

Damit ergibt sich das Helmholtz/Thevénin ESB im Intervall 2 zu:



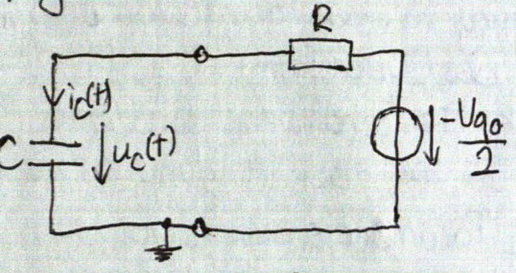
Um die Lösung aufzustellen, braucht man drei Parameter, nämlich u_0, $u_{C\infty}$ und τ. Den Anfangswert u_0 für das Intervall 2 haben wir aber schon in Teilaufgabe J) als $u_0 = u_C(T) = R \cdot I_{q_0}\left(1-e^{-\frac{T}{2RC}}\right)$ bestimmt. Den Gleichgewichtszustand $u_{C\infty}$ können wir direkt dem linksliegenden ESB entnehmen, da er genau der LL-Spannung entspricht, also gilt $u_{C\infty} = U_{q_0}$. Letztendlich wird τ über $\tau = R_i \cdot C$ als $\tau = R \cdot C$ bestimmt. Dabei gilt für die Anfangszeit natürlich $t_0 = T$.

$$\Rightarrow \underline{u_C(t) = U_{q_0} + \left[R \cdot I_{q_0} \cdot \left(1-e^{-\frac{T}{2RC}}\right) - U_{q_0}\right] \cdot e^{-\frac{t-T}{RC}}} \quad \text{für } t \in [T, 2T].$$

Nun kann man direkt den Anfangswert $u_C(2T)$ für das dritte Intervall durch einfaches Einsetzen wie folgt berechnen:

$$u_C(2T) = U_{q_0} + \left[R I_{q_0}\left(1-e^{\frac{-T}{2RC}}\right) - U_{q_0}\right] \cdot e^{-\frac{T}{RC}}$$

Das dritte Zeitintervall ist von der Form der Schaltung völlig gleich zu der im Intervall 2, nur ändert sich ~~der~~ Wert der Spannungsquelle $u_q(t)$ zu $u_q(t) = \frac{-U_{q_0}}{2}$. Das heißt, aber, dass bei der Berechnung der LL-Spannung sich wieder $U_{0_1} = 0V$ ergeben wird, wenn $u_q(t)$ zu Null gesetzt wird. Analog wird $U_{0_2} = \frac{-U_{q_0}}{2}$ gelten, wenn die Quelle $R \cdot I_{q_0}$ zu Null gesetzt wird. Mittels Superposition ergibt sich dann $U_0 = \frac{-U_{q_0}}{2}$. Der Innenwiderstand R_i hängt gar nicht von dem Wert der Quellen ab, da für die Bestimmung von R_i diese zu Null gesetzt werden. Also gilt $R_i = R$ wieder. Daraus ergibt sich folgendes Helmholtz/Thevénin ESB für $t \in [2T, \infty)$:



Dadurch ergeben sich die nötigen Parameter für die Lösung wie oben zu $t_0 = 2T$, $u_0 = u_C(2T) = U_{q_0} + \left[R I_{q_0}\left(1-e^{\frac{-T}{2RC}}\right) - U_{q_0}\right] e^{-\frac{T}{RC}}$, $u_{C\infty} = \frac{-U_{q_0}}{2}$ und $\tau = R \cdot C$.

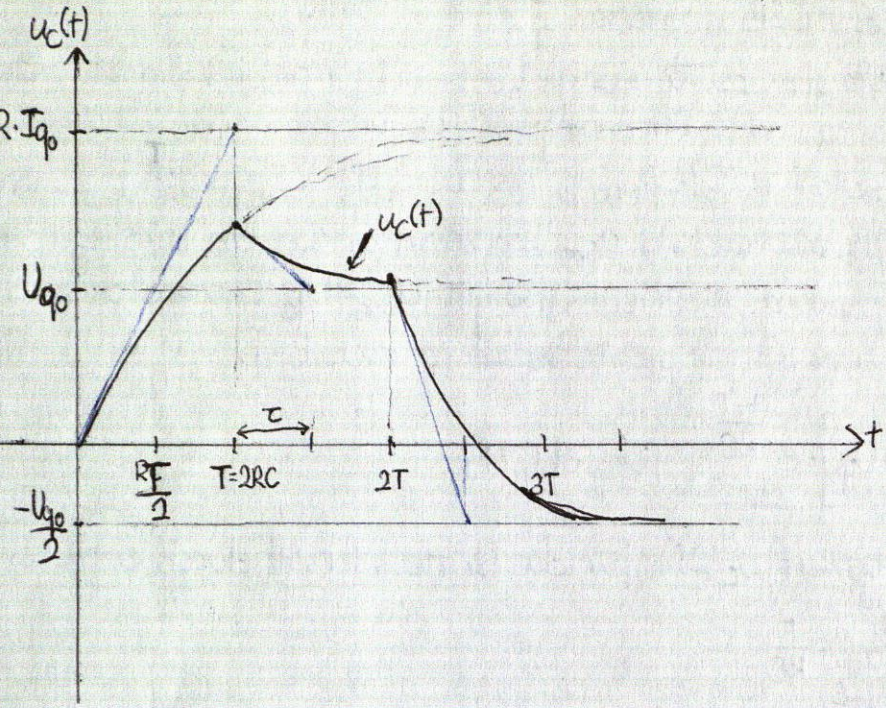
Die Lösung der Zustandsgleichung lautet deshalb:

$$\underline{u_C(t)} = \frac{-U_{q_0}}{2} + \left[\underbrace{U_{q_0} + \left[R I_{q_0}\left(1-e^{\frac{-T}{2RC}}\right) - U_{q_0}\right] e^{\frac{-T}{RC}}}_{u_0} + \frac{U_{q_0}}{2}\right] \cdot e^{-\frac{t-2T}{RC}} = \underline{\frac{-U_{q_0}}{2} + \left[\frac{3U_{q_0}}{2} + \left[R I_{q_0}\left(1-e^{\frac{-T}{2RC}}\right) - U_{q_0}\right] \cdot e^{\frac{-T}{RC}}\right] \cdot e^{-\frac{t-2T}{RC}}}$$

für $t \in [2T, \infty)$

f) Schließlich soll der zeitliche Verlauf von $u_C(t)$ insgesamt skizziert werden. Dabei soll man beachten, dass $u_C(t)$ immer stetig ist. Die drei Teillösungen sind alle in Form von e^{-x} Form, wobei die zu dem jeweiligen Gleichgewichtszustand $u_{C\infty}$ konvergieren. Da $R \cdot I_{q_0} > U_{q_0}$ gilt wird zuerst die Funktion von 0 bis $R \cdot I_{q_0}$ laufen (aber nicht erreichen) und dann ab $t = T$, da $u_C(T) = R I_{q_0}\left(1-e^{-\frac{2RC}{2RC}}\right) \cong 2U_0 \cdot 0{,}63 > U_{q_0}$ gilt, sich gespiegelt verringern. Ab $t = 2T$ fängt die Kurve wieder an, sich zu verringern und erreicht für $t \to \infty$ den Wert $\frac{-U_{q_0}}{2}$. Dabei ist es wieder hilfreich die Tangenten für jeweilige Anfangszeiten einzuzeichnen. Außerdem ist es diesmal auch hilfreich, dass für $t = t_0 + \tau$ 63% (ca. $\frac{2}{3}$) von $u_{C\infty}$ erreicht wird. Die Tatsache, dass für alle Bereiche die Kurve zur $u_{C\infty}$ konvergiert, ergibt sich dadurch, dass τ jeweils positiv und daher Stabilität gegeben ist.

Die Zeichnung sieht folgendermaßen aus:



Zusatz

m) Da für diese Aufgabe eine Schaltung mit allgemeiner Erregung vorliegt, ist die Lösung mit folgender Formel zu bestimmen:

$$u_C(t) = u_C(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} U_0(t') \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'.$$

Dafür sind die Parameter $t_0, u_C(t_0), \tau, U_0(t)$ erforderlich. Unter diesen sind $t_0=0$ und $u_C(0)=3V \cdot \frac{1s}{RC}$ in der Aufgabenstellung gegeben. Für τ und $U_0(t)$ muss man wieder das Helmholtz/Thevénin ESB zeichnen. Aber kann man merken, dass diese Schaltung nur eine Quelle hat und deshalb genau der aus dem ersten Teil der Aufgabe entspricht, so kann man τ und $U_0(t)$ durch das Anpassen der Größen U_0 und R_i aus Teilaufgabe c) bestimmen. Da die Schaltung von der Form genau gleich ist, bleibt der Innenwiderstand R_i, der unabhängig von dem Wert des Quellenstroms ist, gleich als $R_i=2R$. Deswegen ergibt sich $\tau=2RC$ auch für diesen Fall. Da nicht die Schaltweise sondern nur der Wert von $i_q(t)$ sich ändert, gilt immer noch $U_0=R \cdot i_q(t)$. Diesmal gilt aber nach Aufgabenstellung $i_q(t)=\frac{1V}{R} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}}$ und daher $U_0(t)=1V \cdot e^{\frac{-t}{2RC}}$. Hat man jetzt alle nötige Parameter, so kann man diese einsetzen und die Lösung aufstellen:

$$u_C(t) = u_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{2RC}} + \int_0^t \frac{1}{2RC} \cdot 1V e^{\frac{-t'}{2RC}} \cdot e^{-\frac{t-t'}{2RC}} dt' = \frac{3V \cdot s}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} + \int_0^t \frac{1V}{2RC} \cdot e^{-\frac{\cancel{t'}+t-\cancel{t'}}{2RC}} dt'$$

$$= \frac{3Vs}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{2RC}} + \int_0^t \underbrace{\frac{1V}{2RC} \cdot e^{-\frac{t}{2RC}}}_{\text{unabh. von } t'} dt' = \frac{3Vs}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} + \frac{1V}{2RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} \int_0^t dt' = \frac{3Vs}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} + \frac{1V}{2RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} \cdot [t']_0^t$$

$$= \frac{3Vs}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} + \frac{1V}{2RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} \cdot t = \underline{\frac{1V}{RC} \cdot e^{\frac{-t}{2RC}} \left(3s + \frac{t}{2}\right)}$$