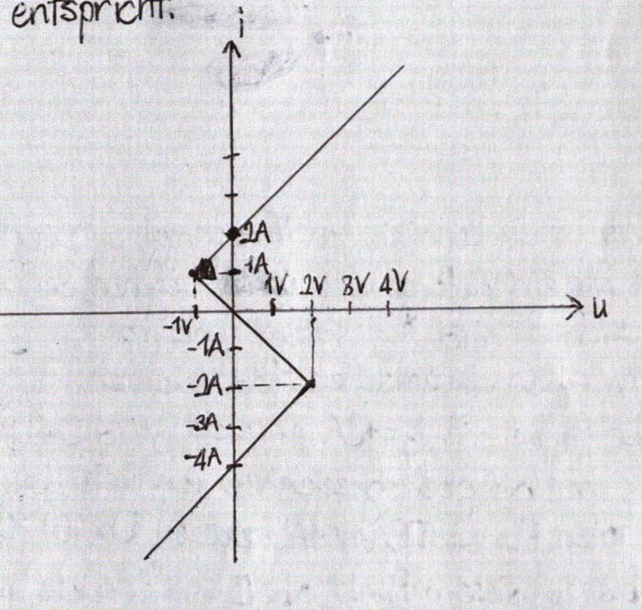
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 3

A1) Um diesen Student helfen zu können, werden wir im Rahmen dieser Aufgabe versuchen, durch geeignete Beschaltung des gegebenen resistiven, stückweise linearen Eintors $\mathcal{N}$ ein Flip-Flop zu entwerfen. Ein Flip-Flop ist ein simples Speicherelement, das zwei stabile Gleichgewichtspunkte besitzt. Dabei kann beispielsweise ein GGP die binäre Zahl „1" und der andere „0" symbolisieren. Die Umschaltung zwischen den beiden Zuständen erfolgt mittels einer Triggerung, die durch Erregung der Schaltung mithilfe einer unabhängigen Quelle gewährleistet wird. Der genauere Ablauf wird im Rahmen der Aufgabe klar.

a) Am Anfang dieser Aufgabe soll zuerst die Beschreibung von $\mathcal{N}$ als Kennlinie in u-i-Ebene, da $\mathcal{N}$ resistiv ist, illustriert werden. Dafür betrachten wir die stückweise lineare Widerstandsbeschreibung, die offensichtlich aus drei Geradenstücke besteht. Dabei sei angemerkt, dass in u-i-Ebene die Steigung einer Leitwert aber nicht einem Widerstand entspricht.

$$u(t) = r(i(t)) = \begin{cases} 1\Omega \cdot (i(t) - 2A) & , i(t) \geq 1A \\ -1\Omega \cdot i(t) & , 1A > i(t) \geq -2A \\ 1\Omega \cdot (i(t) + 4A) & , -2A > i(t) \end{cases}$$



→ Bei der Skizze soll man zuerst die Nullstellen auf i-Achse, indem man bspw. $i(t) = 2A$ usw. einsetzt eintragen. Dann hilft es weiter, dass man die u-Werte an den Intervallgrenzen ausrechnet und die Stetigkeit überprüft, die in diesem Fall gegeben ist. Dann kann man diese Punkte geeignet zu einer Kurve verbinden. Die Steigung im mittleren Bereich ist $\frac{1}{-1} = -1$ und sonst 1. So kann man die Zeichnung überprüfen.

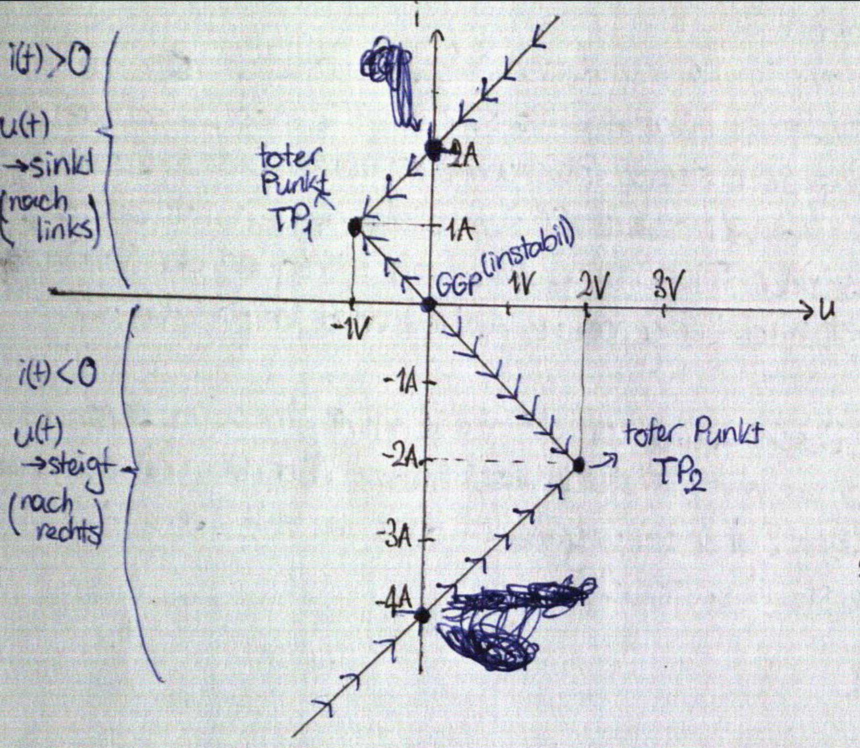
b) Betrachtet man die gegebene Schaltung so merkt man, dass $i_C(t) = -i(t)$ und für $u_{tr}(t) = 0V$, $u(t) = u_C(t)$ gilt. Außerdem gilt an der Kapazität die bekannte Gleichung $\dot{u}_C(t) = \frac{i_C(t)}{C}$. Setzt man für $i_C(t)$ und $u_C(t)$, $-i(t)$ und $u(t)$ ein, so bekommt man ~~das~~ dynamische Verhalten ~~des~~ Stroms und der Spannung in u-i-Ebene durch: $\dot{u}(t) = \frac{-i(t)}{C}$. Das heißt, dass die Kapazität ~~das~~ resistive Netzwerk $\mathcal{N}$ dazu zwingt, dass:

für $i(t) > 0 \Rightarrow \dot{u}(t) < 0$ (wegen Minuszeichen) $\Rightarrow$ u(t) sinkt.

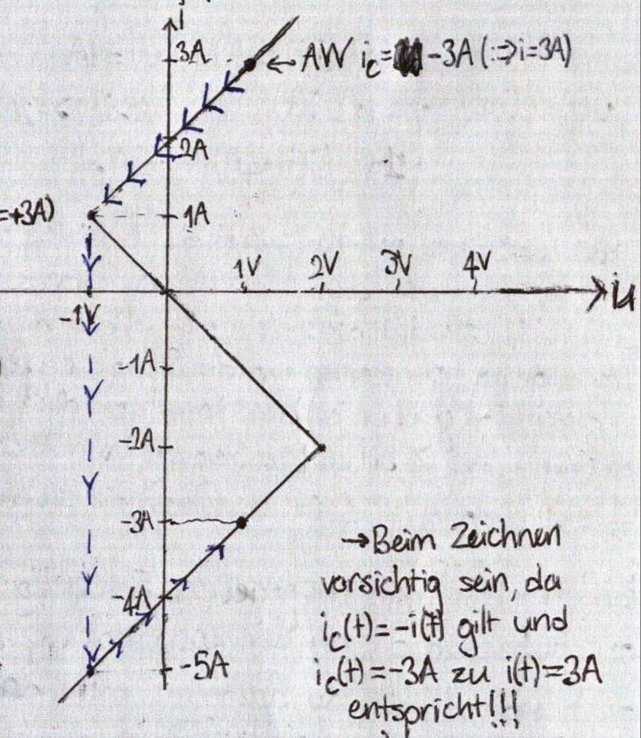
für $i(t) < 0 \Rightarrow \dot{u}(t) > 0 \Rightarrow$ u(t) steigt.

Der dynamische Pfad zeigt genau diese Beziehung, indem man mit Pfeilen andeutet, in welche Richtung die Kennlinie aus einem gegebenen Punkt laufen soll. Wenn $i(t) = 0$ gegeben ist, dann gilt $\dot{u}(t) = 0$ und daraus folgt, dass $u(t)$ einen konstanten Wert annimmt, was einem Gleichgewichtszustand entspricht. Daher sind alle u-Achsenabschnitte $(i(t) = 0)$ GGPs. Die Stabilität dieser GGPs bestimmt man, indem man den Verlauf des dynamischen Pfads um diese Punkte betrachtet. Läuft dieser in den GGP rein, dann heißt das, dass eine kleine Erregung mit dem Rückkehr des Systems in diesen GGP resultiert wird, also dieser GGP stabil ist. Wenn der dynamische Pfad aus dem GGP wegläuft, dann verursacht eine kleine Erregung das endgültige Verlassen dieses GGPs und der GGP ist instabil.

→ Der dynamische Pfad und sich daraus ergebende Gleichgewichtspunkt wird bei der Skizze unten gezeichnet. Wie man an der Skizze erkennen kann, ist der einzige u-Achsenabschnitt, also der einzige GGP im Ursprung gegeben. Da der dynamische Pfad links und rechts aus diesem Punkt raus läuft, ist dieser Gleichgewichtspunkt instabil.



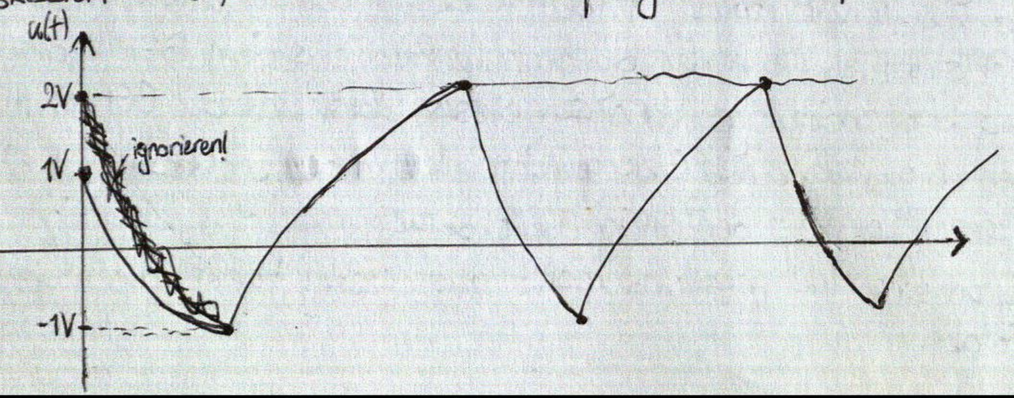
c) Tote Punkte sind stabile Punkte in der Kennlinie, die aber keine Gleichgewichtspunkte sind. In der gegebenen Kennlinie kann man tote Punkte anhand ihrer Stabilität erkennen. Man soll einfach Punkte suchen, in die der dynamische Pfad läuft, also eine kleine Erregung das endgültige Verlassen nicht verursachen kann. Wenn solche Punkte, ~~[illegible]~~ in diesem Fall (Beschaltung mit Kapazität) keine u-Achsenabschnitte, d.h. keine Gleichgewichtspunkte sind, dann sind sie tote Punkte. In der Kennlinie links, kann man zwei solche Punkte $TP_1(-1V, 1A)$ und $TP_2(2V, -2A)$ merken, die beschriftet werden.



d) Rechts ist die Kennlinie von N nochmal skizziert. Diesmal haben wir einen Anfangswert $i_C = -3A$ gegeben, der rechts ($i_C = 3A \Rightarrow i = +3A$) gekennzeichnet wird. Aus diesem Punkt raus, sollen wir den dynamischen Pfad zeichnen, bis der Punkt mit $i_C = +3A$ erreicht wird. Dafür ($i_C = 3A \Rightarrow i = -3A$) können wir die oben gezeichnete Kennlinie bis zum toten Punkt $TP_1(-1V; 1A)$ nutzen. Da $i(t)>0$ gilt, nimmt $u(t)$ bis zu diesem Punkt ab. Dann erreicht man den toten Punkt, aus dem kein Ausweg existiert. In der Tat ist ein toter Punkt, der stabil aber kein GGP ist, Folge von einer überidealisierten Modellierung und existiert nicht. Im Rahmen dieses Modells löst man dieses Problem, indem man unter Beachtung der Stetigkeitsregel für die Zustandsvariable (hier $u_C(t) = u(t)$) auf der Kennlinie springt. Das ist genau unser Ausweg aus $TP_1(-1V, 1A)$. Die Spannung $u(t) = -1V$ bleibt konstant und der dynamische Pfad springt zum anderen einzigen Punkt mit diesem u-Wert, nämlich zu $(-1V, -5A)$. Dieses Phänomen nennt man ein Sprungphänomen. Danach kann man wieder den dynamischen Pfad folgen. Da $i(t)<0$ diesmal gilt, steigt $u(t)$ und der Punkt $(1V, -3A)$ wird erreicht.

→ Beim Zeichnen vorsichtig sein, da $i_C(t) = -i(t)$ gilt und $i_C(t) = -3A$ zu $i(t) = 3A$ entspricht!!!

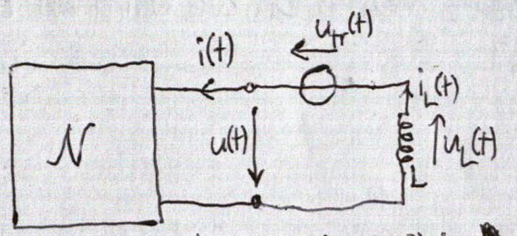
e) Da es nur nach einer qualitativen Skizze gefragt wird, rechnen wir nichts weiteres und zeichnen den zeitlichen Verlauf von $u(t)$, indem wir den dynamischen Pfad folgen. Fangen wir bspw. von $(1V, 3A)$ wie bei d) an, so nimmt u exponential (Lösung der DGL hier nicht explizit gerechnet) bis -1V ab, dann nimmt bis 2V zu (TP_2), dann nimmt wieder exponential bis -1V ab. Hier sei nochmal auf die Stetigkeit von $u(t)$ hingewiesen. Falls wir $i(t)$ skizziert hätten, dann würde die Kurve springen (siehe Skript).



→ Der Verlauf der Spannung ist dabei so, dass die Schaltung stabil ist, d.h. dass der stabile tote Punkt in jedem Teil des Verlaufs asymptotisch erreicht wird. Das ist damit begründet, dass auf dem ganzen Weg auf der Kennlinie der Innenwiderstand zu $1\Omega > 0$ entspricht und mit $C>0$, daher sich eine positive τ ergibt, was zu einer stabilen Schaltung führt.

f) Diese Schaltung ist offensichtlich kein Flip-Flop, da sie keine stabile GGPs besitzt. Die Funktion, die diese Schaltung erfüllt, wird beim zeitlichen Verlauf von $u(t)$ in Teilaufgabe e) klar, da $u(t)$ periodisch zwischen zwei Werten hin und her oszilliert. Deswegen ist diese Schaltung ein <u>Oszillator</u>.

g) Nun haben wir die linke Schaltung gegeben. Dabei muss man wie in der Aufgabenstellung angedeutet, auf die umgekehrte Polung der Induktivität, im Gegensatz zur ersetzten Kapazität achten (u_C und u_L, bzw. i_C und i_L haben unterschiedliche Richtungen). In dieser Verschaltungsform gelten die Zusammenhänge $i_L(t)=i(t)$, $u_L(t)=-u(t)$. Außerdem gilt an der Induktivität $\dot{i}_L(t)=\frac{u_L(t)}{L}$. Ersetzt man i_L und u_L, so bekommt man das durch die Induktivität eingeprägte dynamische Verhalten der Schaltung als: $\dot{i}(t)=\frac{-u(t)}{L}$. Daraus folgt, dass der dynamische Pfad den folgenden Regeln gehorcht:

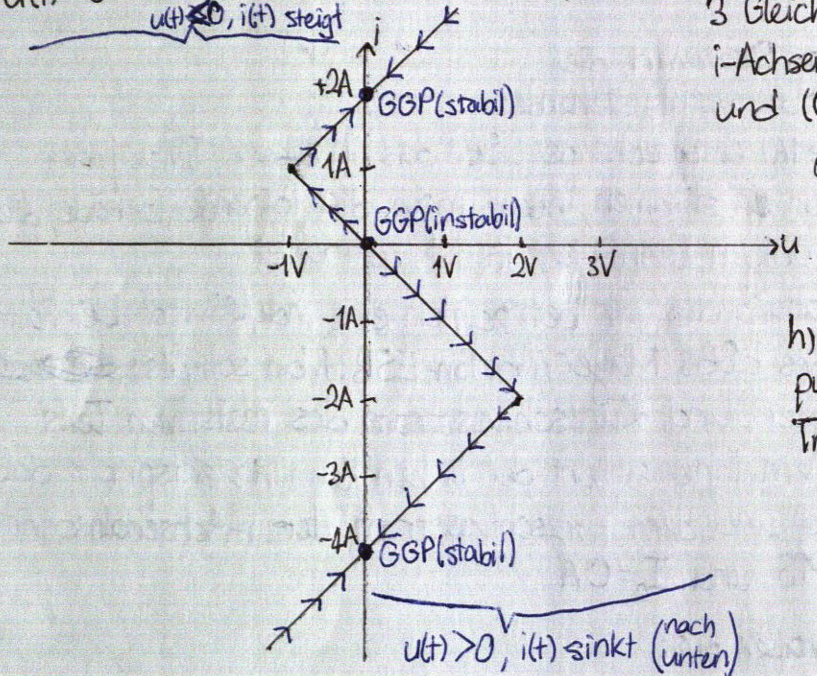


$u(t)>0 \Rightarrow \dot{i}(t)<0 \Rightarrow$ <u>$i(t)$ nimmt ab.</u>

$u(t)<0 \Rightarrow \dot{i}(t)>0 \Rightarrow$ <u>$i(t)$ nimmt zu.</u>

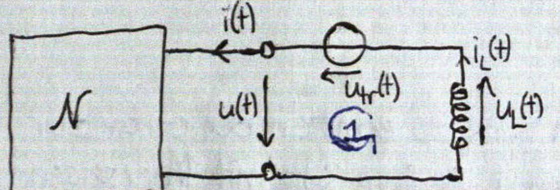
$u(t)=0 \Rightarrow \dot{i}(t)=0 \Rightarrow i(t)$ ist konstant, GGP.

→ In diesem Fall liegen die GGPs deswegen auf der i-Achse. Deshalb ergeben sich der unten links skizzierte dynamische Pfad und angegebene GGPs. Diesmal existieren 3 Gleichgewichtspunkte, da es 3 i-Achsenabschnitte gibt. Die 3 GGPs sind (0,2A), (0,0) und (0,-4A). Die Stabilität dieser GGPs kann man analog anhand des dynamischen Pfads beurteilen. Daraus folgt, dass die GGPs (0,2A) und (0,-4A) stabil sind, dagegen der GGP im Ursprung instabil ist.



h) Diese Kennlinie besitzt zwei stabile Gleichgewichtspunkte und deswegen kann mittels einer Triggerung als ein Flip-Flop betrieben werden.

i) Ab jetzt haben wir das Ziel, diese Flip-Flop-Schaltung von einem Gleichgewichtszustand in den anderen zu triggern. Dafür steht die Spannungsquelle $u_{tr}(t)$ zur Verfügung, die ab dem Zeitpunkt $t=0$ die konstante Spannung U_0 liefern wird. Aus dem Messwert $i_L(0)=i(0)=2A$ können wir ablesen, dass die Schaltung sich am Anfang im GGP (0,2A) befinden. Wir sollen also durch die Triggerung das System in den anderen GGP (0,-4A) überführen. Zuerst sollen wir aber $\dot{i}(t)$ in Abhängigkeit von $u(t)$ und U_0 angeben:



KVL bei 1: $u(t)+u_L(t)+u_{tr}(t)=0$, $u_{tr}(t)=U_0$, $u_L(t)=L\cdot\dot{i}_L(t)$

$i_L(t)=i(t)$

$\Rightarrow u_L(t)=L\cdot\dot{i}(t)$

$\Rightarrow u(t)+U_0+L\cdot\dot{i}(t)=0$

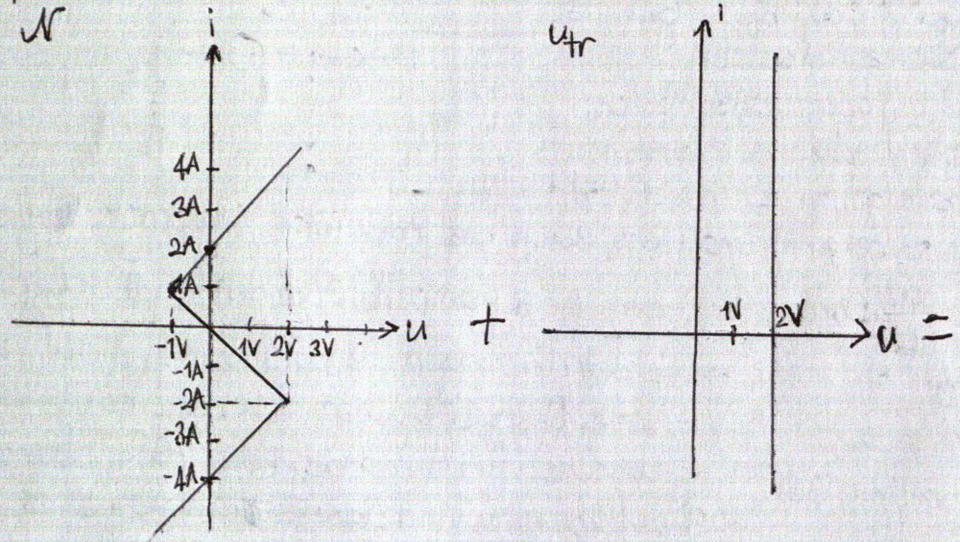
$$\Rightarrow \dot{i}(t)=\frac{-1}{L}(u(t)+U_0)$$

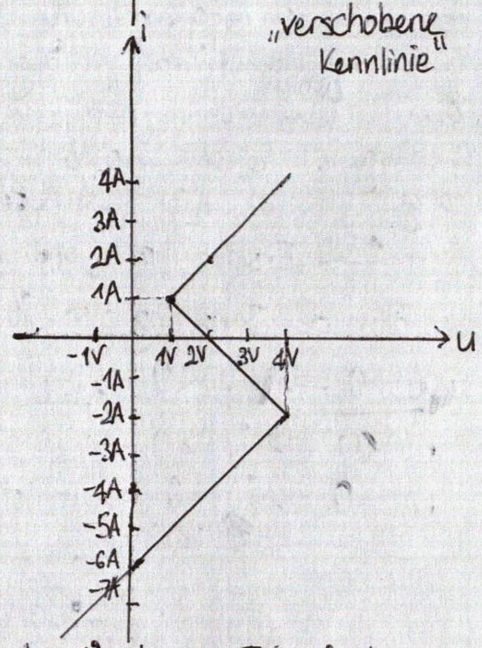
Die GGPs liegen genau dort, wo $\dot{i}(t)=0 \Rightarrow i(t)=\text{const.}$ gilt. Deswegen liegen die GGPs nach dem Einschalten der Quelle auf der Gerade <u>$u(t)=-U_0$</u>.

j) Um den GGP mit $i>0$ verlassen zu können, muss durch Triggerung gewährleistet werden, dass dieser kein GGP mehr ist. Diese Aussage ist aber äquivalent dazu, dass auf $u(t)=-U_0$ kein GGP mit $i>0$ gibt. Das gilt genau dann, wenn $-U_0<-1V$ gilt. Daher gilt es, dass $U_0>1V$ sein soll, damit der

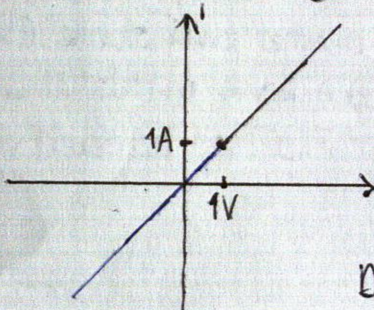
GGP mit $i>0$ verlassen werden kann. $\Rightarrow U_0>1V$.

k) Nun beträgt der Wert der Triggerungsspannung $u_{tr}(t)=U_0=2V$. Diese Spannungsquelle ist zu dem resistiven Netzwerk $\mathcal{N}$ in Reihe verschaltet. Man kann daher $\mathcal{N}$ und u_{tr} zu einem gemeinsamen resistiven Netzwerk zusammenfassen, indem man die Kennlinien beider Elementen nebeneinander aufaddiert.



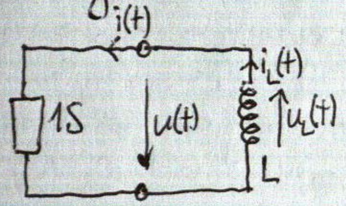


→ Wegen der Reihenschaltung sind für jeden Stromwert die Spannungen zu summieren. Dadurch ergibt sich die rechts stehende verschobene Kennlinie. Das den obigen Ast ($i(t)\geq 1A$) entsprechende ESB, das in dieser Teilaufgabe gezeichnet werden soll, kann man ganz einfach bestimmen, indem man die folgende Gerade, die die bis zu Unendlichen ausgedehnte Form des obigen Kennlinienteils ist, betrachtet.



Da die Schaltung, die wir betrachten, eine Induktivität beinhaltet, ist die Art des ESBs Mayer/Norton-ESB. Man soll also den Innenleitwert und Kurzschlussstrom des resistiven Teils bestimmen. Dem Innenleitwert der linken Kennlinie entspricht dabei deren Steigung und dem Kurzschlussstrom, der i-Achsenabschnitt.
Daher gilt: $G_i=1S$ und $I_0=0A$.

Das Mayer/Norton-ESB sieht dann folgendermaßen aus:



Den Lösungsansatz liest man aus der Formelsammlung ab:
$i_L(t)=i_{L\infty}+[i_0-i_{L\infty}]\cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$. Dabei kann man die benötigten Parameter mittels gegebener Größen, und des ESBs bestimmen. Es gilt:

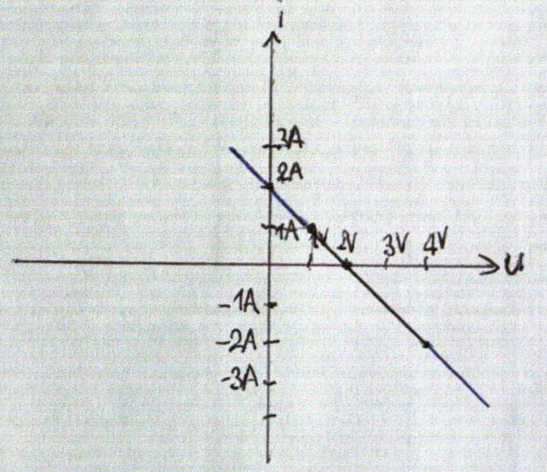
$\rightarrow t_0=0$, $i_0=i_L(0)=2A$, $i_{L\infty}=I_0=0A$, $\tau=G_i\cdot L=1S\cdot 1mH=1ms$ (L ist ganz oben in der Aufgabenstellung gegeben)

Die Lösung lautet dann: $\boxed{i_L(t)=2A\cdot e^{-\frac{t}{1ms}}}$.

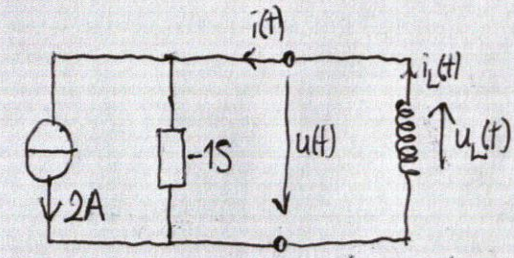
l) Um den Zeitpunkt, zu dem der obere Ast der Kennlinie verlassen wird, zu ermitteln, der genau zur Gleichheit $i(t_1)=i_L(t_1)=1A$ genügen soll, muss man einfach bei der Lösung die linke Seite mit 1A ersetzen und die Gleichung nach t_1 auflösen:

$$\Rightarrow i_L(t_1)=1A=2A\cdot e^{-\frac{t_1}{1ms}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{\frac{-t_1}{1ms}} \mid \ln(\cdot) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-t_1}{1ms} \Rightarrow \underline{t_1}=-1ms\cdot\ln(0,5)\approx \underline{\underline{0,693ms}}$$

m) Jetzt befindet man sich am Punkt (1V, 1A) auf der verschobenen Kennlinie zum Zeitpunkt $t_1=0{,}693\,ms$. Da nun der Übergang zum mittleren Ast der Kennlinie stattfindet, muss das Mayer/Norton-ESB dieses Intervalls ($1A > i(t) \geq -2A$) gezeichnet und daraus der zeitliche Verlauf von $i_L(t)$ in diesem Intervall berechnet werden. Als Anfangswert dient dabei der Endwert des vorherigen Intervalls, also, $i_L(t_1)=1A$ mit $t_1=0{,}693\,ms$. Ganz analog erweitert man diesen Ast zu einer Gerade:



Wieder analog entspricht dem Innenleitwert die Steigung und dem KS-Strom der i-Achsenabschnitt. Daraus folgt, dass $G_i=-1S$ und $I_0=2A$ gilt. Das Mayer/Norton-ESB ergibt sich zu:



Damit kann man die für den Lösungsansatz nötigen Parameter ermitteln:

$t_0=t_1=-1ms\cdot\ln(0{,}5)\approx 0{,}693\,ms$, $i_0=i_L(t_0)=1A$, $i_{L\infty}=2A$, $\tau=G_i\cdot L=-1S\cdot 1mH=-1ms$.

Daher lautet die Lösung: $\boxed{i_L(t)=2A-1A\cdot e^{-\frac{t-(-1ms\cdot\ln 0{,}5)}{-1ms}}=2A-1A\cdot e^{\frac{t-0{,}693ms}{1ms}}}$

n) Wenn man den dynamischen Pfad aus Teilaufgabe g) betrachtet, so sieht man, dass für irgendeinen Betriebspunkt mit negativem Strom ($i(t)<0$) der dynamische Pfad zu dem unteren GGP läuft. Da wir beim Ausschalten der Triggerung wieder diese Kennlinie bekommen werden und unser Ziel der Betrieb der Schaltung in diesem GGP (0, -1A) ist, reicht es aus, wenn die Triggerung, bis $i(t)<0$ gewährleistet wird, durchgeführt wird. Um den Zeitpunkt, zu dem dieser geschieht, also $i_L(T)<0$ gilt, zu bestimmen, muss man lediglich die linke Seite obiger Lösung mit 0 ersetzen und die Gleichung nach T auflösen:

$$i_L(T)=0=2A-1A\cdot e^{\frac{T-0{,}693ms}{1ms}} \Leftrightarrow e^{\frac{T-0{,}693ms}{1ms}}\cdot \cancel{1A}=\cancel{2A} \Rightarrow \frac{T-0{,}693ms}{1ms}=\ln(2)$$

$$\Rightarrow T=0{,}693ms+1ms\cdot\ln(2)=-1ms\cdot\ln(0{,}5)+1ms\cdot\ln(2)\underset{\substack{\uparrow\\ -\ln(0{,}5)=\ln(2)}}{=}1ms\cdot\ln(2)+1ms\cdot\ln(2)=2ms\cdot\ln(2)$$

$$\Rightarrow \underline{T=2\ln(2)\,ms\approx 1{,}386\,ms}$$

→ Das heißt, wenn $u_{Tr}(t)=2V$ mehr als $T=1{,}386\,ms$ eingeschaltet bleibt, dann ändert das Flip-Flop seinen Zustand.