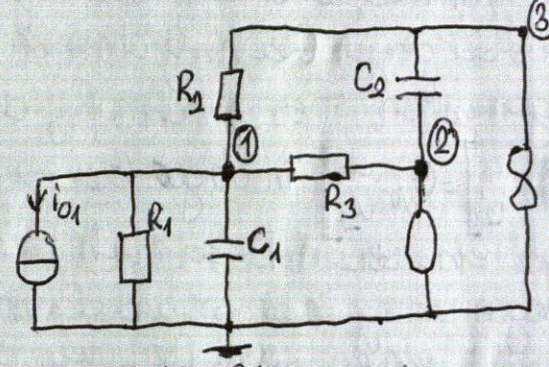
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 4

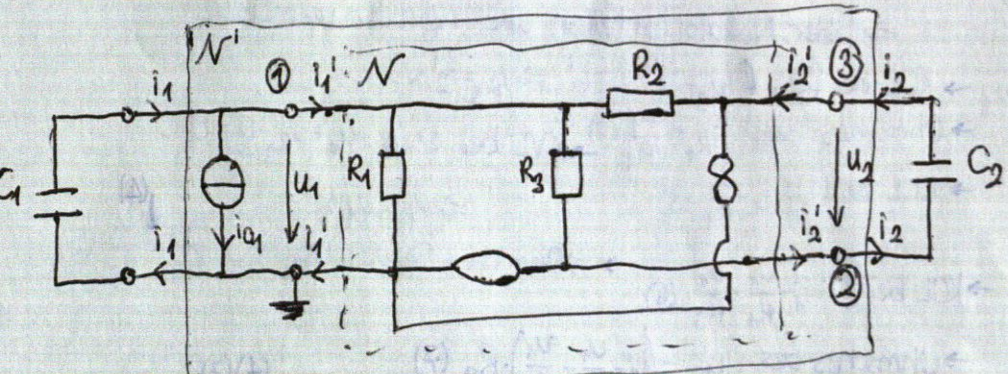
A1) In dieser Aufgabe haben wir das Ziel für die vorliegende Schaltung Schritt für Schritt die Zustandsgleichung aufzustellen und dann mit den gegebenen konkreten Zahlenwerten die Lösung des aufgestellten Differentialgleichungssystems erster Ordnung zu berechnen. Damit kann der zeitliche Verlauf der Zustandsgrößen dieser Schaltung durch die sinngemäße Erweiterung der Methoden für Schaltungen ersten Grades hergeleitet werden.

a) Zuerst soll die Schaltung so umgezeichnet werden, dass im Kern ein resistives, quellenfreies Zweitor liegt, das mit den Reaktanzen und Quellen extern beschaltet ist. Diese Darstellung entspricht der Zerlegung des Systems in einzeln einfacher zu behandelnde Teile, die für die weiteren Betrachtungen die Arbeit erleichtert. Zunächst sollen wir dabei den Operationsverstärker mit dem Nullor-ESB ersetzen. Erinnert man sich noch an Schaltungstechnik 1, so setzt man im Rahmen des Nullor-ESBs am Op-Amp-Eingang ein Nullator und am Op-Amp-Ausgang einen Norator ein. Die Schaltung sieht dann wie folgt aus:



Nun soll der resistive, quellenfreie Teil der Schaltung in den gegebenen Rahmen eingebettet werden. Da da die gegebene Knotennummerierung auch gelten soll, muss die linke untere Klemme an Masse liegen, da die Kapazität C_1 und Stromquelle i_q zwischen dem Knoten ① und der Masse liegen. Analog soll die rechte untere Klemme dem Knoten ② entsprechen, weil die Kapazität C_2 zwischen ② und ③ liegt.

Nach diesen Schlussfolgerungen kann man mit dem Widerstand R_1 anfangen, der zwischen ① und Masse liegt und daher einfach parallel zur Stromquelle und C_1 vertikal gezeichnet werden soll. Dann kann man den Widerstand R_2 und den Nullator, die die einzigen Bauelemente in den Strecken ①-③ bzw. ②-Masse sind horizontal einmal oben und einmal unten eintragen. R_1 liegt dabei natürlich links. Nun kann R_3 zwischen ① und ② eingefügt werden. Den soll man sinngemäß oben links von R_2 (Knoten ①) und unten rechts von Nullator (Knoten ②) verbinden. Übrig bleibt nur der Norator, den man mittels einer Leitungsbrücke zwischen ③ und Masse anlegen, also rechts von R_2 und links von Nullator verbinden soll. Das resultierende Schaltbild sieht dann so aus:



b) Der Zustandsgrößenvektor ist nichts anderes als eine kompakte Darstellung beider Zustandsvariablen. Es ist aus den vorherigen Kapiteln bekannt, dass man im Falle einer Kapazität die Spannung u_C und einer Induktivität den Strom i_L als Zustandsgröße kriegt. Da in dieser Schaltung zwei Kapazitäten vorhanden sind, sind die Zustandsgrößen u_{C_1} und u_{C_2}, wodurch sich der Zustandsgrößenvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix}$ ergibt. Die Torgrößen des resistiven Zweitors N' sind i_1, i_2, u_1, u_2.

Mit ganz einfachen KVL-Gleichungen kommt man auf $u_{C_1} = u_1$ und $u_{C_2} = u_2$. Dadurch sieht der Zustandsgrößenvektor so aus:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

c) Nachdem ~~der~~ Zustandsgrößenvektor schon bestimmt ist, ist das Ziel die Differentialgleichung aufzustellen. Es ist zuerst am einfachsten den externsten Teil der Schaltung nämlich die Kapazitäten zu berücksichtigen (<u>Achtung</u>: Dieser Schritt gehört eigentlich der Teilaufgabe c) nicht, aber didaktisch sinnvoller hier statt in d) durchzuführen). Die Kapazitäten haben die bekannten Gleichungen $i_{C_1} = C_1 \cdot \dot{u}_{C_1}$ und $i_{C_2} = C_2 \cdot \dot{u}_{C_2}$. Außerdem gilt es $u_1 = u_{C_1}$, $u_2 = u_{C_2}$, $i_1 = -i_{C_1}$ und $i_2 = -i_{C_2}$, die man in die vorherigen Beziehungen einsetzen kann. Man bekommt dann $\dot{u}_1 = \frac{-i_1}{C_1}$ und $\dot{u}_2 = \frac{-i_2}{C_2}$. Man kann hier merken, dass die linke Seite der beiden Gleichungen den Zustandsgrößenvektor bilden. Die rechten Seiten kann man auch in Matrix-Vektor-Schreibweise zusammenfassen und kommt auf:

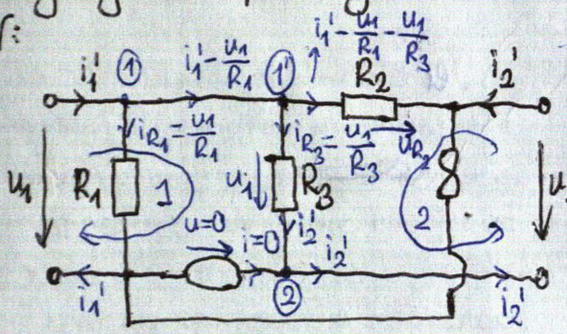
$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Damit wird der erste Schritt in Richtung der Zustandsgleichung durchgeführt, in der aber die Ströme in diesem Fall nicht vorkommen dürfen, sondern nur u_1, u_2, deren Ableitungen und Bauelementegrößen. Um die Ströme zu eliminieren, muss man das resistive Zweitor betrachten. Da es in der Aufgabenstellung nach dem quellenfreien Teil N gefragt wird, ist es sinnvoll eine geeignete Zweitorbeschreibung zu wählen um die Ströme i_1 und i_2 aus der obigen Gleichung eliminieren zu können. Da zwischen i_1, i_2 und i_1', i_2' ganz einfache Beziehungen gelten, ist es zweckmäßig die <u>Leitwertsmatrix</u> von N zu bestimmen, und diese Gleichung $\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \underline{G}_N \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ in obige Gleichung unter Berücksichtigung der Zusammenhänge von i_1, i_2 und i_1', i_2' einzusetzen. Es sei auch hier angemerkt, dass das lineare <u>und quellenfreie</u> Zweitor N deswegen streng linear ist, und daher seine Leitwertsbeschreibung in Form einer Matrix $\underline{G}_N$ dargestellt werden kann. Die Linearität von N folgt daraus, dass darin nur lineare Bauteile vorkommen.

Um die Leitwertsmatrix $\underline{G}_N$ zu bestimmen gibt es zwei Möglichkeiten, die aus Schaltungstechnik 1 bekannt sind, aber für Wiederholungszwecke, hier ausführlich diskutiert werden sollen.

<u>Möglichkeit 1</u>: „by inspection" also durch das Aufstellen der KCL, KVL, Bauelementegleichungen und die geeigneten Umformungen.

N:



→ Torbedingungen: Ein- & Auslaufende Ströme eines Tors sind gleichgroß.

→ Nullator: $u=0, i=0$, Norator: u und i beliebig.

⇒ Über Nullator arbeiten und Norator vermeiden.

→ KCL bei ②: $i_{R_3} = i_2' - i = i_2' \Rightarrow i_{R_3} = i_2'$ (1)

→ Ohmsches Ges.: $i_{R_1} = \frac{u_1}{R_1}$ (2) → KVL bei 1: $-u_1 + u_{R_3} - \underbrace{u}_{=0} = 0$

→ KCL bei ①: $i_1' - \frac{u_1}{R_1}$ (3)

$\Rightarrow u_{R_3} = u_1$ (4)

→ ⇒ Ohmsches Gesetz: $i_{R_3} = \frac{u_{R_3}}{R_3} \overset{(4)}{=} \frac{u_1}{R_3}$ (5)

→ KCL bei ①': $i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}$ (6)

→ Ohmsches Ges.: $u_{R_2} = \left(i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}\right) \cdot R_2$ (7)

→ KVL bei 2: $-u_2 - u_{R_2} + u_{R_3} = 0 \Rightarrow \underline{u_2 = u_{R_3} - u_{R_2} \overset{(4),(7)}{=} u_1 - \left(i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}\right) \cdot R_2}$

$\Rightarrow \left(i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}\right) \cdot R_2 = u_1 - u_2 \Rightarrow i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3} = \frac{u_1}{R_2} - \frac{u_2}{R_2}$

$\Rightarrow i_1' = u_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + u_2 \cdot \left(\frac{-1}{R_2}\right)$: Gleichung 1

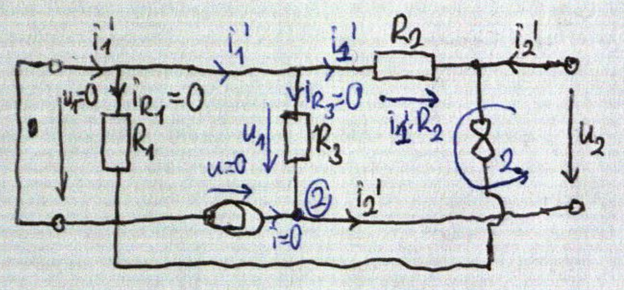
→ (1) und (5): $i_2' = i_{R_3} = \frac{u_1}{R_3} \Rightarrow \underline{i_2' = u_1 \cdot \frac{1}{R_3} + u_2 \cdot 0}$: Gleichung 2

→ Schreibt man die Gleichungen 1 und 2 in Matrix-Vektor-Notation, so kommt man auf die Leitwertsbeschreibung:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{G}_N} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

• Möglichkeit 2: LL/KS-Methode: Die steuernden Größen (hier u_1, u_2) sollen einzeln auf 0 gesetzt werden (hier KS bei Tor 1 bzw. 2) und jeweils müssen die gesteuerten Größen (hier i_1' und i_2') in Abhängigkeit der nichtverschwindenden (nicht auf 0 gesetzten) steuernden Größe bestimmt werden.

→ $u_1=0$: Tor 1 wird kurzgeschlossen, gesucht sind $i_1'(u_2)$ und $i_2'(u_2)$.



• Wegen $u_1=0$ fließt bei R_1 und R_3 kein Strom.

→ KCL bei ②: $i_2' - \underbrace{i_{R_3}}_{=0} - i = 0 \Rightarrow \underline{i_2' = 0}$

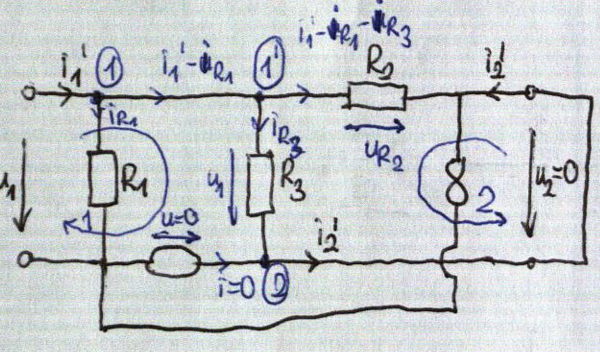
→ Ohmsch. Ges.: $u_{R_2} = i_1' \cdot R_2$

→ KVL bei 2: $-u_2 - \underbrace{u_{R_2}}_{i_1' \cdot R_2} + \underbrace{u_1}_{=0} = 0 \Rightarrow -u_2 - i_1' R_2 = 0$

$\Rightarrow i_1' R_2 = -u_2$

$\Rightarrow \underline{i_1' = u_2 \cdot \left(\frac{-1}{R_2}\right)}$

→ $u_2=0$: Tor 2 ist kurzgeschlossen, gesucht sind $i_1'(u_1), i_2'(u_1)$



→ KVL bei 1: $u_1 = u_{R_3} - u = u_{R_3}$

→ KCL bei ①: $i_1' - i_{R_1}$

→ KCL bei ①': $i_1' - i_{R_1} - i_{R_3}$

→ Ohmsch. Ges: $i_{R_1} = \frac{u_1}{R_1}$, $i_{R_3} = \frac{u_1}{R_3}$

$\Rightarrow$ $i_1' - i_{R_1} = i_1' - \frac{u_1}{R_1}$, $\quad i_1' - i_{R_1} - i_{R_3} = i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}$

→ KCL bei ②: $i_2' = \underbrace{i}_{=0} + i_{R_3} \Rightarrow i_2' = i_{R_3} = \frac{u_1}{R_3} \Rightarrow \underline{i_2' = \frac{u_1}{R_3}}$

→ Ohmsch. Gesetz: $u_{R_2} = \left(i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}\right) \cdot R_2$ → KVL bei 2: $-\underbrace{u_2}_{=0} - u_{R_2} + u_1 = 0 \Rightarrow u_{R_2} = u_1 \Rightarrow \left(i_1' - \frac{u_1}{R_1} - \frac{u_1}{R_3}\right) \cdot R_2 = u_1$

$\Rightarrow \underline{i_1' = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1}{R_2} + \frac{u_1}{R_3}}$

→ Nachdem jetzt alle gesuchten Einträge der Leitwertsmatrix gefunden sind, kann man die Leitwertsbeschreibung von N aufstellen, die natürlich mit dem Ergebnis der Möglichkeit 1 zusammenfällt:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

d) Da die beiden Gleichungen $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ nun bekannt sind, fehlt es nur der Zusammenhang zwischen $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix}$ um die Zustandsgleichungen von der Form $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot v$ aufzustellen. Da nur eine Erregung i_{0_1} vorhanden ist, haben wir keine Einkoppelmatrix $\underline{B}$ sondern den Einkoppelvektor $\underline{b}$. Der gesuchte Zusammenhang kann unter Betrachtung des Schaltbilds aus a) durch zwei simple KCL-Gleichungen bestimmt werden. Die erste KCL-Gleichung stellt man am Knoten ① auf und bekommt: $i_1 = i_{0_1} + i_1'$. Die Zweite ist am Knoten ③ und lautet: $i_2' = i_2$. Der gesuchte Zusammenhang lautet daher:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1' + i_{0_1} \\ i_2' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix}}_{\text{Leitwerts-beschr.}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_{0_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{R_3} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_{0_1}$$

Setzt man diesen nun in die erste Gleichung ein, so soll man einige Matrixmultiplikationen durchführen und kommt auf die Zustandsgleichungen der Schaltung:

$$\begin{bmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{C_1} & 0\\ 0 & \frac{-1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{C_1} & 0\\ 0 & \frac{-1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & \frac{-1}{R_2}\\ \frac{1}{R_3} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-1}{C_1} & 0\\ 0 & \frac{-1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\cdot i_{0_1}$$

Distributivgesetz

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{C_1R_2}\\ \frac{-1}{C_2R_3} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-1}{C_1}\\ 0\end{bmatrix}\cdot i_{0_1}$$

e) Laut Angabe ist jetzt die Erregung abgeschaltet ($i_{0_1}=0$), also liegt ein homogenes System mit den Zustandsgleichungen von der Form $\dot{\underline{x}}=\underset{\sim}{A}\cdot\underline{x}$ vor. Da die sämtlichen Bauelemente gegeben sind, kann die Matrix $\underset{\sim}{A}$ jetzt zahlenmäßig berechnet werden:

$R_1=1\Omega,\ R_2=0{,}5\Omega,\ R_3=1\Omega,\ C_1=1F,\ C_2=\frac{2}{3}F.$

$a_{11}=\frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=-\frac{1}{1F}\cdot\left(\frac{1}{1\Omega}+\frac{2}{1\Omega}+\frac{1}{1\Omega}\right)=\frac{-1}{1F}\cdot\frac{4}{1\Omega}=\underline{-4\cdot\frac{1}{s}}$, $\underline{a_{12}}=\frac{1}{C_1R_2}=\frac{1}{1F\cdot\frac{1}{2}\Omega}=\underline{2\cdot\frac{1}{s}}$.

$\underline{a_{21}}=\frac{-1}{C_2R_3}=\frac{-1}{\frac{2}{3}F\cdot 1\Omega}=\underline{\frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{s}}$, $\underline{a_{22}=0}$

Die Zustandsgleichung lautet deshalb: $\begin{bmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\frac{1}{s} & 2\frac{1}{s}\\ \frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{s} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$

Um diese Gleichung zu lösen, braucht man eigentlich die Differentialgleichungstheorie, die aber erst am Ende der Mathematik-3-Vorlesung gelehrt wird. Auch die Begriffe Eigenwerte und Eigenvektoren werden erst im Laufe des zweiten Semesters behandelt und auf dem Kontext der DGLn erst in Mathe 3 besprochen. Deswegen arbeiten wir in ST2 mit gegebenen festen Ansätzen, die aber eigentlich von der oben angesprochenen Theorie herleitbar sind.

In dieser Aufgabe sind die Eigenwerte der Matrix $\underset{\sim}{A}$ gesucht. Dafür sollen zunächst die Spur und Determinante von $\underset{\sim}{A}$ berechnet werden, die mit $T=\mathrm{Sp}\underset{\sim}{A}=a_{11}+a_{22}$ und $\Delta=\det\underset{\sim}{A}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ definiert sind. Daher gilt:

$\underline{T}=-4\frac{1}{s}+0=\underline{-4\frac{1}{s}}$, $\underline{\Delta}=\underbrace{-4\frac{1}{s}\cdot 0}_{=0}-\left(\frac{-3}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{s}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{s}\right)=-\left(-3\cdot\frac{1}{s^2}\right)=\underline{3\frac{1}{s^2}}$

Die Vorschrift für die Berechnung der Eigenwerte lautet $\lambda_{1,2}=\frac{T}{2}\pm\sqrt{\frac{T^2}{4}-\Delta}$ und ergibt für $\underset{\sim}{A}$:

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\frac{1}{s}}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(-4\frac{1}{s}\right)^2}{4}-3\frac{1}{s^2}}=-2\frac{1}{s}\pm\sqrt{4\frac{1}{s^2}-3\frac{1}{s^2}}=-2\frac{1}{s}\pm 1\frac{1}{s}\Rightarrow\lambda_1=-1\cdot\frac{1}{s},\ \lambda_2=-3\cdot\frac{1}{s}$$

f) Die Eigenvektoren einer Matrix erfüllen definitionsgemäß mit dem dem Vektor zugehörigen Eigenwert $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\underline{q}=\underline{0}$, wobei $\underset{\sim}{I}$ die Einheitsmatrix ist. Die Eigenvektoren können mit aus Mathe 1 bekanntem Gauß-Verfahren (auf Zeilenstufenform bringen und auflösen) durch das Lösen der Gleichung $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\underline{q}=\underline{0}$ für jeweilige Eigenwerte berechnet werden. Es gibt aber wieder einen Ansatz, der unter der Bedingung $\lambda_1\neq\lambda_2$, die in dem Fall erfüllt ist, die Eigenvektoren $\underline{q_1}$ und $\underline{q_2}$ liefert. Da $a_{12}=2\cdot\frac{1}{s}\neq 0$ gilt, kann man die erste Variante dieses Ansatzes (siehe Zusammenfassung verwenden. Der lautet: $q_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11}-\lambda_1 \end{bmatrix}$ und $q_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11}-\lambda_2 \end{bmatrix}$, ergibt: $q_1 = \begin{bmatrix} -2\cdot\frac{1}{s} \\ -4\frac{1}{s}-(-1\cdot\frac{1}{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$

$$q_2 = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{s} \\ -4\frac{1}{s}-(-3\frac{1}{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

→ Ob die Eigenvektoren richtig berechnet werden, kann man durch das Einsetzen in die Gleichung $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\cdot q = 0$ überprüfen:

q_1: $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\cdot q_1 = (\underset{\sim}{A}+\frac{1}{s}\underset{\sim}{I})\cdot q_1 = \left(\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{s}\right)\cdot q_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 6-6 \\ 3-3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓

q_2: $(\underset{\sim}{A}-\lambda_2\underset{\sim}{I})\cdot q_2 = (\underset{\sim}{A}+\frac{3}{1s}\underset{\sim}{I})\cdot q_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 3-3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓

Außerdem gilt für Eigenwert-Eigenvektor-Paare der interessante Zusammenhang $\underset{\sim}{A}\cdot q = \lambda\cdot q$, der am Beispiel von q_1 kurz dargestellt wird und auch zur Überprüfung des Ergebnisses verwendet werden könnte:

$$\underset{\sim}{A}\cdot q_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 8-6 \\ 3+0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2} \overset{!}{=} \lambda_1\cdot q_1 = -1\cdot\frac{1}{s}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s^2} \checkmark$$

<u>Anmerkung</u>: Da die Gleichung $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\cdot q = 0$ auch für alle Vielfachen $\alpha\cdot q$ von q mit $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt, gibt es für jeden Eigenwert unendlich viele Eigenvektoren mit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (ohne Null per Definition). Deswegen ist bspw. die Antwort $q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$ auch richtig.

g) Für die allgemeine Lösung existiert wiederum ein Ansatz $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} q_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} q_2$ mit $c_1, c_2 \in\mathbb{R}$, der mit dem aus Schaltungen ersten Grades sich ähnelt. Es gibt statt einem zwei Terme wegen der Erhöhung der Dimension. Außerdem wird die skalare Exponentialfunktion e^{At} mit der Matrixexponentialfunktion $e^{\underset{\sim}{A}t}$ ersetzt. $e^{\underset{\sim}{A}t}$ kann entweder mit einer Reihenentwicklung numerisch oder eben mithilfe der Eigenwerte von $\underset{\sim}{A}$ analytisch über den Zusammenhang $e^{\underset{\sim}{A}t} = e^{\lambda t}$ berechnet werden. Da sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenvektoren bekannt sind, bleibt nichts anderes als diese in den Ansatz einzusetzen übrig. Dadurch lautet die allgemeine Lösung der Zustandsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = c_1\cdot e^{\frac{-t}{1s}}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} + c_2 e^{\frac{-3t}{1s}}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} \quad , c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

h) Nun soll durch die Berechnung der Konstanten $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ die spezielle Lösung der Zustandsgleichungen für die Anfangswerte $u_{C_1}(0) = 8V$ und $u_{C_2}(0) = 0V$ bestimmt werden. Da $u_{C_1} = u_1$ und $u_{C_2} = u_2$ gelten, gilt für die Anfangswerte einfach $u_1(0) = 8V$, $u_2(0) = 0V$. Man soll lediglich in die allgemeine Lösung aus g) $t=0$ und die Anfangswerte einsetzen:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} = c_1\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} + c_2\cdot\underbrace{e^0}_{=1}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} = \begin{bmatrix} -2c_1-2c_2 \\ -3c_1-c_2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 8V \\ 0V \end{bmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit dem Gauß-Verfahren gelöst werden:

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -2\frac{1}{s} & -2\frac{1}{s} & 8V \\ -3\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} & 0V \end{array}\right) \xrightarrow[\text{in (II)}]{-\frac{3}{2}(I)+(II)} \left(\begin{array}{cc|c} -2\frac{1}{s} & -2\frac{1}{s} & 8V \\ 0 & 2\frac{1}{s} & -12V \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} -2\cdot\frac{1}{s}\cdot c_1 - 2\cdot\frac{1}{s}\cdot c_2 = 8V \\ 2\frac{1}{s}c_2 = -12V \end{array}$$

Koeff. von c_1 Koeff. von c_2

$$\Rightarrow \underline{c_2} = \frac{-12V}{2\frac{1}{s}} = \underline{-6Vs} \qquad \Rightarrow -2c_1 \cdot \frac{1}{s} - 2\frac{1}{\cancel{s}}(-6V\cancel{s}) = 8V \Leftrightarrow -2\frac{1}{s} \cdot c_1 = 2 \cdot (-6V) + 8V \Leftrightarrow -2\frac{1}{s}c_1 = -12V + 8V$$

$$\Leftrightarrow -2\frac{1}{s}c_1 = -4V \Leftrightarrow \underline{c_1} = \frac{-4V}{-2\frac{1}{s}} = \underline{\underline{2Vs}}$$

Damit lautet die Lösung für die Anfangswerte $u_1(0) = 8V$, $u_2(0) = 0V$:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = 2V\cancel{s} \cdot e^{-\frac{t}{1s}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} - 6V\cancel{s} \cdot e^{-\frac{3t}{1s}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \underline{2V \cdot e^{-\frac{t}{1s}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} - 6V \cdot e^{-\frac{3t}{1s}} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$