# MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 5

**A1)** Im Rahmen dieser Aufgabe soll die Schaltung aus letztem Übungsblatt, für die die gegebene Zustandsgleichung schon hergeleitet wurde, nun mit anderer Bauelementedimensionierung und diesmal vorhandener Erregung, analysiert, und deren Lösung bestimmt werden. Mit der Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren sollen diesmal geeignete Transformationen durchgeführt werden, um die Lösung zu bestimmen.

a) Die gegebene Zustandsgleichung lautet:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{-1}{R_3 C_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-i_{01}}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}\cdot v_0}$$

Diesmal ist die Erregungsquelle $i_{01}$ vorhanden und das System ist nicht mehr homogen. Daher kann man nicht auf die Methoden aus der letzten Woche zurückgreifen. Zuerst muss eine Transformation in ein homogenes System durchgeführt werden. Um dieses zu tun, definiert man den verschobenen Zustandsvektor $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_\infty$. Für dieses System liegt der Gleichgewichtspunkt im Ursprung, da $\underline{x}'(\infty) = \underline{x}(\infty) - \underbrace{\underline{x}_\infty}_{=\underline{x}(\infty)} = \underline{0}$ gilt. Außerdem gilt für die Ableitung von $\underline{x}'$, $\dot{\underline{x}}' = \dot{\underline{x}}$, da $\underline{x}_\infty$ eine Konstante ist und abgeleitet Null ergibt. $\underline{x}_\infty$ ist der GGP des nichttransformierten Systems und wird bekannterweise durch das Nullsetzen von $\dot{\underline{x}}$ bestimmt, da im Gleichgewicht die Zustandsgrößen sich nicht ändern und die Ableitungen davon deshalb verschwinden. Setzt man, das in die Zustandsgleichung ein und löst nach $\underline{x} = \underline{x}_\infty$ auf, so ergibt sich:

$$\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\cdot\underline{x} + \underline{b}\cdot v_0 \overset{!}{=} \underline{0} \Rightarrow \underline{b}\cdot v_0 = -\underset{\sim}{A}\cdot\underline{x}_\infty \;\big\backslash \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} \Rightarrow \underline{x}_\infty = -\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underline{b}\cdot v_0 .$$

Diese Vorschrift funktioniert natürlich nur, wenn $\underset{\sim}{A}$ invertierbar ist. Da $\underset{\sim}{A}$, $\underline{b}\cdot v_0$ schon bekannt sind, kann man nun wie erfordert die Transformation auf die homogene DGL $\dot{\underline{x}}' = \underset{\sim}{A}\cdot\underline{x}'$ durchführen.

$\underline{x}_\infty$ lautet:

$$\underline{x}_\infty = -\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underline{b}\cdot v_0 .$$

Setzt man die gegebenen Bauelementewerte $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 0{,}5\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $C_1 = 2F$, $C_2 = 1F$, $i_{01} = 3A$ ein, so ergibt sich:

$$a_{11} = \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) = \frac{-1}{2F}\cdot\left(\frac{1}{1\Omega}+\frac{2}{1\Omega}+\frac{1}{1\Omega}\right) = -2\cdot\frac{1}{s} \; ; \; a_{12} = \frac{1}{R_2 C_1} = \frac{2}{2F\Omega} = 1\cdot\frac{1}{s} \; ; \; a_{21} = \frac{-1}{R_3 C_2} = \frac{-1}{1\Omega\cdot 1F} = -1\cdot\frac{1}{s} \; ; \; a_{22} = 0$$

NR: $\det \underset{\sim}{A} = -2\cdot\frac{1}{s}\cdot 0 - \left(-1\frac{1}{s}\cdot 1\frac{1}{s}\right) = 1\frac{1}{s^2}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{s} & 1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underset{\sim}{A}}\cdot\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = 1s^2 \begin{bmatrix} 0 & -1\frac{1}{s} \\ +1\frac{1}{s} & -2\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1s \\ 1s & -2s \end{bmatrix} \; , \; \underline{b}\cdot v_0 = \begin{bmatrix} \frac{-i_{01}}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3A}{2F} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5\frac{V}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_\infty = -\underset{\sim}{A}^{-1}\cdot\underline{b}\cdot v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1s \\ -1s & 2s \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1{,}5\frac{V}{s} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5V \end{bmatrix}}} \qquad \Rightarrow \underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_\infty = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5V \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 - 1{,}5V \end{bmatrix}}}$$

Letztendlich lautet das transformierte homogene DGL-System:

$$\dot{\underline{x}}' = \underset{\sim}{A}\cdot\underline{x}' \quad \text{mit } \underline{x}' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 - 1{,}5V \end{bmatrix}, \; \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -2\frac{1}{s} & 1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Die Eigenwerte der Zustandsmatrix $\underset{\sim}{A}$ bestimmt man wieder mit dem gleichen Ansatz $\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$, wobei die Determinante $\Delta$ mit $\Delta = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$ und Spur T mit $T = a_{11} + a_{22}$ berechnet werden soll. Setzt man die Werte ein, so ergibt sich für die Eigenwerte:

$$T = a_{11} + a_{22} = -2\frac{1}{s} + 0 = -2\frac{1}{s}, \; \Delta = -2\cdot\frac{1}{s}\cdot 0 - \left(-1\cdot\frac{1}{s}\cdot 1\frac{1}{s}\right) = 1\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1\frac{1}{s} \pm \sqrt{1\frac{1}{s^2} - 1\frac{1}{s^2}} = -1\frac{1}{s} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = -1\frac{1}{s}}}$$

Die Transformation auf Normalform $\dot{\underline{\xi}} = \underset{\sim}{\Lambda}\cdot\underline{\xi}$ erfolgt mit den Vorschriften $\underline{\xi} = \underset{\sim}{Q}^{-1}\cdot\underline{x}$ und $\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{Q}^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}$, wobei $\underset{\sim}{Q}$ die Modalmatrix ist, die als Spalten die beiden Eigenvektoren $q_1, q_2$ nach dem Ansatz $q_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}$ aus letzter Woche hat. Man sieht, dass die Vorschrift für Transformation auf Normalform dann scheitert, wenn $\underset{\sim}{Q}$ nicht invertierbar ist. Berechnet man die Eigenvektoren, so merkt man, dass die beiden gleich mit $q_1 = q_2 = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} \\ -2\frac{1}{s} + 1\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} \end{bmatrix}$ sind. Deswegen hat $\underset{\sim}{Q}$ zwei linear abhängige Spalten und keinen vollen Rang. Das heißt, dass $\underset{\sim}{Q}$ nicht invertierbar ist. Diese Eigenschaft kann man auch mit der Determinantenberechnung feststellen:

$$\det\underset{\sim}{Q} = \begin{vmatrix} -1\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} \end{vmatrix} = \left(-1\frac{1}{s}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{s}\right)^2 = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{Q} \text{ ist nicht invertierbar.}$$

Diese Situation ist mit $\lambda_1 = \lambda_2$ immer der Fall und deswegen scheitert die Transformation auf Normalform.

c) Mit der Transformation auf Normalform $\dot{\underline{\xi}} = \underset{\sim}{\Lambda}\cdot\underline{\xi}$ erzeugt man zwei entkoppelte DGLn, da $\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ gilt. Diese Gleichungen sind einfach zu lösen. Da diese Methode aber scheitert, wird in dieser Aufgabe die Transformation auf Jordan-Normalform bevorzugt, die eine teilweise Entkopplung der beiden DGLn durchführt, aber für beliebige Eigenwerte verwendbar ist. Die Transformation auf diese Form $\dot{\underline{\xi}} = \underset{\sim}{J}\cdot\underline{\xi}$ erfolgt mit der Vorschrift $\underline{\xi} = \underset{\sim}{Q}'^{-1}\cdot\underline{x}'$ und $\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{Q}'^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}'$, da die Bedingung $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}' = \underset{\sim}{Q}'\cdot\underset{\sim}{J}$ auch aus der Angabe erfüllt sein soll. $\underset{\sim}{J}$ muss dabei definitionsgemäß die Gestalt $\underset{\sim}{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ besitzen. Dafür soll aber zunächst $\underset{\sim}{Q}'$ mit den beiden Spaltenvektoren $q_1'$ und $q_2'$ nach der Vorschrift unten hergeleitet werden. $q_1'$ ist die zu $\lambda$ zugehörige Eigenvektor. Aber $q_2'$ ist kein Eigenvektor, da keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu $\underset{\sim}{A}$ gefunden werden kann. $q_2'$ ist ein Hauptvektor und wird wieder in Mathe 3 Vorlesung später behandelt. Daher nutzt man im Rahmen der ST2 Vorlesung feste Ansätze, die folgendermaßen ausschauen:

$$q_1' = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} \end{bmatrix}, \quad q_2' = \begin{bmatrix} -a_{12}\cdot 1s \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot 1s - 1 \end{bmatrix}$$

Setzt man die Werte von Teilaufgabe a) an, so kommt aus:

$$q_1' = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} \\ \frac{-2\frac{1}{s}-0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad q_2' = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s}\cdot 1s \\ \frac{-2\frac{1}{s}-0}{2}\cdot 1s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

So hat die Matrix $Q'$ die Gestalt:

$$Q' = [q_1' \;\; q_2'] = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & -1 \\ -1\frac{1}{s} & -2 \end{bmatrix}$$

Und das auf Jordan-Normalform transformierte System hat die Form:

$$\dot{\xi} = J\cdot\xi \quad \text{mit} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & 1 \\ 0 & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \xi = Q'^{-1}\cdot x'$$

Möchte man nicht unbedingt erforderte $\xi$ in Abhängigkeit von $x = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ auch berechnen, so soll $Q$ invertiert und mit den eben berechneten $x'$ multipliziert werden:

$$Q'^{-1} = \frac{1}{\det Q'}\cdot\begin{bmatrix} q_{22}' & -q_{12}' \\ -q_{21}' & q_{11}' \end{bmatrix} = \frac{1}{-1\frac{1}{s}\cdot(-2)-(-1\cdot(-1\frac{1}{s}))}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ +1\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\frac{1}{s}-1\frac{1}{s}}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix} = 1s\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{s} & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s & 1s \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \xi = Q'^{-1}\cdot x' = \begin{bmatrix} -2s & 1s \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 - 1{,}5V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2u_1\cdot s + u_2\cdot 1s - 1{,}5Vs \\ u_1 - u_2 + 1{,}5V \end{bmatrix}$$

d) Nun soll die Richtigkeit von $Q'$ durch die Überprüfung der Gestalt von $J$ nach $J = Q'^{-1}\cdot A\cdot Q'$ bestimmt werden. Führt man die Matrixmultiplikationen durch:

$$J = Q'^{-1}\cdot A\cdot Q' = \begin{bmatrix} -2s & 1s \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2\frac{1}{s} & 1\frac{1}{s} \\ -1\frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & -1 \\ -1\frac{1}{s} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-1 & -2 \\ -2\frac{1}{s}+1\frac{1}{s} & 1\frac{1}{s} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & -1 \\ -1\frac{1}{s} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1\frac{1}{s} & 1\frac{1}{s} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & -1 \\ -1\frac{1}{s} & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\frac{1}{s}+2\frac{1}{s} & -3+4 \\ 1\frac{1}{s^2}-1\frac{1}{s^2} & 1\frac{1}{s}-2\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & 1 \\ 0 & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \checkmark$$

Also besitzt $J$ die erwartete Gestalt und ist damit die oben berechnete $Q'$ richtig.

e) Die Differentialgleichung wird in der Teilaufgabe c) schon aufgestellt und lautet:

$$\dot{\xi} = J\cdot\xi = \begin{bmatrix} -1\frac{1}{s} & 1 \\ 0 & -1\frac{1}{s} \end{bmatrix}\cdot\xi \quad \text{mit} \quad \xi = Q'^{-1}\cdot x' = \begin{bmatrix} -2u_1\cdot s + u_2\cdot 1s - 1{,}5Vs \\ u_1 - u_2 + 1{,}5V \end{bmatrix}$$

Es bleibt nur übrig, die Anfangswerte in $x_1$-$x_2$-Ebene in $\underline{\xi}$-Raum mit der ebenso gleichen Vorschrift zu transformieren. Die Anfangswerte lauten $\underline{x}(0)=\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2V\\1V\end{bmatrix}$. Transformiert man diese mittels $\underline{\xi}(0)=\underline{\underline{Q}}'^{-1}\cdot\underline{x}'$, so bekommt man:

$$\underline{\xi}(0)=\underline{\underline{Q}}'^{-1}\cdot\underline{x}'(0)=\begin{bmatrix}-2u_1(0)\cdot s+u_2(0)\cdot s-1{,}5Vs\\ u_1(0)-u_2(0)+1{,}5V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4Vs+1Vs-1{,}5Vs\\ 2V-1V+1{,}5V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4{,}5Vs\\ 2{,}5V\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\xi_{01}=-4{,}5Vs\\ \xi_{02}=2{,}5V\end{matrix}$$

f) Die Lösung in $\xi_1$-$\xi_2$-Ebene lautet allgemein $\underline{\xi}(t)=e^{\underline{\underline{J}}t}\cdot\underline{\xi}_0=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi_{01}\\ \xi_{02}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}(\xi_{01}+t\xi_{02})\\ e^{\lambda t}\xi_{02}\end{bmatrix}$. Mit diesem festen Ansatz kann man die spezielle Lösung für gegebene Anfangswerte in $\underline{\xi}$-Raum einfach durch Einsetzen bestimmen. Diese spezielle Lösung lautet:

$$\underline{\underline{\underline{\xi}(t)}}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}(\xi_{01}+t\xi_{02})\\ e^{\lambda t}\xi_{02}\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}e^{-t\cdot\frac{1}{s}}(-4{,}5Vs+t\cdot 2{,}5V)\\ e^{-t\cdot\frac{1}{s}}\cdot 2{,}5V\end{bmatrix}}}$$

g) Um diese Lösung in $x_1'$-$x_2'$-Ebene zu transformieren, soll man den Zusammenhang zwischen $\underline{\xi}$ und $\underline{x}'$ nutzen. Dieser lautet $\underline{\xi}=\underline{\underline{Q}}'^{-1}\cdot\underline{x}'$ bzw. $\underline{x}'=\underline{\underline{Q}}'\cdot\underline{\xi}$. Setzt man die Lösung in $\underline{\xi}$-Ebene in die zweite Gleichung ein, so bekommt man die Lösung in $x_1'$-$x_2'$-Ebene:

$$\underline{\underline{\underline{x}'}}=\underline{\underline{Q}}'\cdot\underline{\xi}=\begin{bmatrix}-1\frac{1}{s} & -1\\ -1\frac{1}{s} & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{\frac{-t}{s}}(-4{,}5Vs+t\cdot 2{,}5V)\\ e^{\frac{-t}{s}}\cdot 2{,}5V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\frac{-t}{s}}(4{,}5V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})-2{,}5V\cdot e^{\frac{-t}{s}}\\ e^{\frac{-t}{s}}(4{,}5V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})-5Ve^{\frac{-t}{s}}\end{bmatrix}=\underline{\underline{\begin{bmatrix}e^{\frac{-t}{s}}(2V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\\ e^{\frac{-t}{s}}(-0{,}5V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\end{bmatrix}}}$$

h) Nun soll die Lösung anschließend in die ursprüngliche $x_1$-$x_2$-Ebene rücktransformiert werden. Dafür soll offensichtlich auf den Zusammenhang $\underline{x}'=\underline{x}-\underline{x}_{D0}$ aufgegriffen, bzw. dieser als $\underline{x}=\underline{x}'+\underline{x}_{D0}$ aufgeschrieben werden. Da $\underline{x}'$ und $\underline{x}_{D0}$-Vektoren schon in Teilaufgaben g) bzw. a) berechnet wurden, soll man diese lediglich in die obige Beziehung einsetzen, um die Lösung in $x_1$-$x_2$-Ebene zu bestimmen.

$$\underline{x}=\underline{x}'+\underline{x}_{D0}=\begin{bmatrix}e^{\frac{-t}{s}}(2V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\\ e^{\frac{-t}{s}}(-0{,}5V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1{,}5V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\frac{-t}{s}}(2V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\\ 1{,}5V+e^{\frac{-t}{s}}(-0{,}5V-2{,}5V\cdot\frac{t}{1s})\end{bmatrix}$$