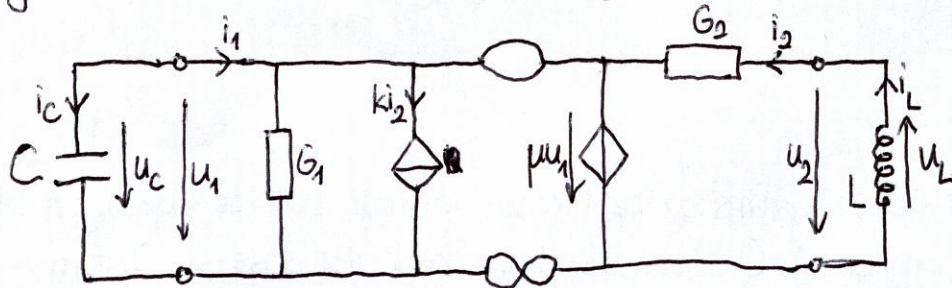


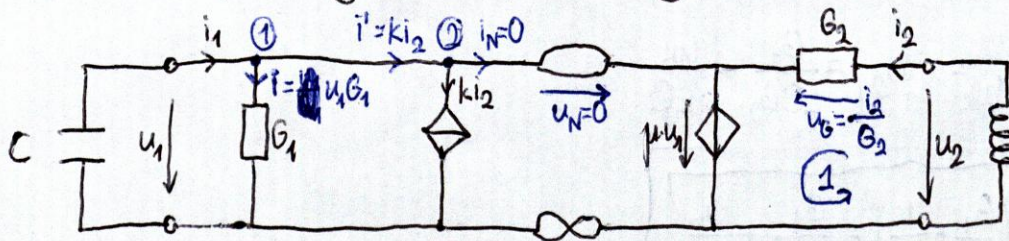
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 6

A1.) Das Ziel dieser Aufgabe ist wieder eine gegebene Schaltung zu charakterisieren und analysieren, also genau die Aufgabe der Schaltungstechnik. Dabei bedient man sich zur Charakterisierung wieder die in Zusammenfassung 4 vorgestellte Methode um die Zustandsgleichungen aufzustellen. Dann verwendet man eine geeignete Transformationsvorschrift um die Schaltung einfacher analysieren zu können. Im Rahmen dieser Analyse soll wieder die Lösung für Zustandsgrößen berechnet werden. Außerdem soll diesmal eine neue wichtige Darstellungsmöglichkeit nämlich Phasenportraits, die das dynamische Verhalten der Schaltungen veranschaulichen, eingeführt werden.

a) Unten ist die gegebene Schaltung zu finden. Der erste Schritt bei der Bestimmung der Zustandsgleichung ist die geeignete Wahl der Zustandsgrößen. Da die Schaltung als Reaktanz eine Kapazität C und eine Induktivität L besitzt ist der Zustandsvektor als $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$ zu wählen. Da nach der üblichen Konvention die Strom- und Spannungs Pfeile wie unten gezeichnet werden, gilt außerdem $u_C = u_1$ und $i_L = i_2$. Deswegen ergibt sich \underline{x} zu $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$.



Bekannterweise gilt dann aufgrund der Reaktanzgleichungen der Zusammenhang $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$. Um diese unerwünschten Größen in der Zustandsgleichung, die im Allgemeinen die Form $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot v$ besitzt, zu eliminieren, soll man diese als gesteuerte Größen einer Zweitorbeschreibung wählen und dann diese in den obigen Zusammenhang einsetzen. Greift man seine ST1-Kenntnisse zurück, dann merkt man, dass die inverse Hybridbeschreibung die geeignete Variante ist. Da diese Schaltung weder Nichtlinearitäten noch unabhängige Quellen beinhaltet, darf man schon schlussfolgern, dass sie streng linear ist und deshalb die inverse Hybridmatrix \underline{H}^{-1} existiert. Um die Beschreibung in $\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underline{H}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ Form zu bestimmen (Quellenvektor fällt wegen Quellenfreiheit weg), bedient man sich die KCL und KVL-Gleichungen:



- Ohmsches Gesetz: $i = u_1 G_1$
- KCL bei ②: $i_N + k i_2 - i' = 0 \Rightarrow i' = k i_2$
- KCL bei ①: $i_1 - i - i' = 0 \Rightarrow i_1 = i + i' = u_1 G_1 + k i_2$
- Ohmsches Gesetz: $u_G = \frac{i_2}{G_2}$
- KVL bei 1: $-u_2 + u_G + \mu u_1 = 0$
- $\Rightarrow u_2 = u_G + \mu u_1 = \frac{i_2}{G_2} + \mu u_1$
- \Rightarrow 1. Gleichung: $i_1 = G_1 u_1 + k i_2$
- \Rightarrow 2. Gleichung: $u_2 = \mu u_1 + \frac{1}{G_2} i_2$

Daher ergibt sich die inverse Hybridmatrix zu:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} G_1 & k \\ \mu & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix}$$

b) Wie bereits erklärt, soll nun die inverse Hybridbeschreibung in den Zusammenhang $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ eingesetzt werden, um die Zustandsgleichung der vorliegenden Schaltung zu bestimmen.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 & k \\ \mu & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C} & \frac{k}{C} \\ -\frac{\mu}{L} & -\frac{1}{LG_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & k \\ \mu & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Also lautet die in diesem Fall wegen Quellenfreiheit homogene Zustandsgleichung folgendermaßen:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C} & \frac{k}{C} \\ -\frac{\mu}{L} & -\frac{1}{LG_2} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Um jetzt den Gleichgewichtspunkt dieses Systems zu bestimmen, soll man auf die Definition eines GGP's allgemein zurückgreifen, nämlich $\dot{x} = 0$. Diese Gleichheit bedeutet, dass die Zustandsgrößen auf einem Wert konstant bleiben und sich nicht ändern, was genau der intuitiven Bedeutung des Gleichgewichts entspricht. Setzt man also die linke Seite der Zustandsgleichung auf Null, so bekommt man den einzigen GGP, ~~der~~ der für alle Bauelementenwerte gilt:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C} & \frac{k}{C} \\ -\frac{\mu}{L} & -\frac{1}{LG_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{G_1}{C} u_1 - \frac{k}{C} u_2 = 0 \\ -\frac{\mu}{L} u_1 - \frac{1}{LG_2} u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{GGP}(0,0)}$$

~~c)~~ Die Eigenwerte der Zustandsmatrix A berechnet man wieder, indem zuerst die Spur und die Determinante berechnet und diese in die ~~Formel~~ Formel $\frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$ eingesetzt werden.

Es gilt:

$$T = a_{11} + a_{22} = -\frac{G_1}{C} - \frac{1}{LG_2}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{G_1}{LCG_2} - \frac{\mu k}{LC}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{G_1}{C} - \frac{1}{LG_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{G_1}{C} + \frac{1}{LG_2} \right)^2 - \frac{G_1}{LCG_2} + \frac{\mu k}{LC}}$$

Da es in der Aufgabenstellung exakt aufgefordert wird, dass die Eigenwerte in obiger Form gegeben werden müssen, rechnen wir an dieser Stelle nicht weiter.

d) Nun sind die beiden Eigenwerte für spezielle Bauelementdimensionierungen gegeben als $\lambda_1 = (-1 + 3j) \frac{1}{s}$ und $\lambda_2 = (-1 - 3j) \frac{1}{s}$. Um dieses System mit komplex konjugierten Eigenwerten auf Normalform zu transformieren gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich die komplexwertige diagonale Normalform und die reellwertige Normalform. Die erste Variante funktioniert ganz normal, indem man die Eigenwerte und Eigenvektoren der Zustandsmatrix \underline{A} bestimmt, die Modalmatrix $\underline{Q} = [q_1 \ q_2]$ aufstellt und die Diagonalmatrix $\underline{\Lambda} = \underline{Q}^{-1} \underline{A} \underline{Q} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}$ mit $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ erzeugt. In diesem

Fall hat man zwei entkoppelte DGLn, aber diese Form eignet sich für die Realisierung dieser Schaltung nicht, da die beiden Zeilen eine Schaltung 1. Grades mit komplexen Bauelementen beschreiben und komplexe Bauelemente nicht realisierbar sind.

Zweite Variante wird durch die Transformationsmatrix $\underline{Q}' = [q_r \ -q_i]$ erzeugt, wobei $q_1 = q_r + j q_i$ gilt, also q_r und $-q_i$ sich durch Aufspaltung eines Eigenvektors in Real- und Imaginärteil ergeben.

Wenn diese Transformation durchgeführt wird, ergibt sich die Matrix $\underline{\Lambda}' = \underline{Q}'^{-1} \underline{A} \underline{Q}' = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ mit $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. In diesem Fall sind die beiden Gleichungen verkoppelt, aber die Realisierung dieser Beschreibung erfolgt mit reellen Bauelementwerten, die realisierbar sind.

Außerdem ist die reellwertige Normalform ~~zu~~ nötig, um die Phasenportraits darstellen zu können. Da an Teilaufgaben i) und j) nach Phasenportraits gefragt wird, ist in diesem

Fall die reellwertige Normalform vorzuziehen.

e) Wie bereits oben besprochen soll nun der gegebene Eigenvektor $q_1 = q_r + j q_i = \begin{bmatrix} 2\Omega \\ 3-3\tau \end{bmatrix} \frac{1}{s}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt werden, damit mit dem Realteilvektor und dem Negativen Imaginärteilvektor ~~als~~ als Spalten die Modalmatrix $\underline{Q}' = [q_r \ -q_i]$ aufgeschrieben werden kann.

Es gilt dabei:

$$q_r = \operatorname{Re}\{q_1\} = \begin{bmatrix} 2\Omega \\ 3 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad q_i = \operatorname{Im}\{q_1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \Rightarrow -q_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

Man soll dabei vorsichtig sein, dass der Vektor $-q_i$ aber nicht q_i verwendet wird. \underline{Q}' lautet dann:

$$\underline{Q}' = [q_r \ -q_i] = \begin{bmatrix} \frac{2\Omega}{As} & 0 \\ \frac{3}{s} & \frac{3}{s} \end{bmatrix}$$

f) Greift man wieder auf die Überlegungen aus Teilaufgabe d) zurück, so wird die Transformationsvorschrift und sich nach Transformation ergebende Matrix mit $\underline{\Lambda}' = \underline{Q}'^{-1} \underline{A} \underline{Q}' = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, wobei α und β Real- und Imaginärteil des Eigenwerts $\lambda_1 = (-1 + 3j) \frac{1}{s}$ sind, definiert.

Zuerst braucht man die Inverse von \underline{Q}' , die mit dem bekannten Ansatz für 2x2-Matrizen durch

$\underline{Q}'^{-1} = \frac{1}{\det \underline{Q}'} \begin{bmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{bmatrix}$ zu bestimmen ist. Die Determinante $\det \underline{Q}'$ ergibt sich zu:

$$\det \underline{Q}' = q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} = \frac{2\Omega}{As} \cdot \frac{3}{s} - 0 \cdot \frac{3}{s} = \frac{6\Omega}{As^2}$$

Damit berechnet sich Q^{-1} zu:

$$Q^{-1} = \frac{1}{6 \frac{V}{As^2}} \begin{bmatrix} 3 \frac{1}{s} & 0 \\ -3 \frac{1}{s} & 2 \frac{V}{As} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{As}{V} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{As}{V} & \frac{1}{3} s \end{bmatrix}$$

Setzt man diese in die Transformationsvorschrift ein, so ergibt sich $\underline{\underline{\Lambda}}'$ zu:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Lambda}}' &= Q^{-1} \underline{\underline{A}} Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{As}{V} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{As}{V} & \frac{1}{3} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{1}{s} & -2 \frac{V}{As} \\ 3 \frac{1}{s} & 3 \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{V}{As} & 0 \\ 3 \frac{1}{s} & 3 \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{As}{V} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{As}{V} & \frac{1}{3} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \frac{1}{s} \cdot 2 \frac{V}{As} - 2 \frac{V}{As} \cdot 3 \frac{1}{s} & 0 - 2 \frac{V}{As} \cdot 3 \frac{1}{s} \\ 3 \frac{1}{s} \cdot 2 \frac{V}{As} - 4 \frac{1}{s} \cdot 3 \frac{1}{s} & 0 - 4 \frac{1}{s} \cdot 3 \frac{1}{s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{As}{V} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{As}{V} & \frac{1}{3} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \frac{V}{As^2} & -6 \frac{V}{As^2} \\ 6 \frac{1}{s^2} & -12 \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{As}{V} \cdot (-2 \frac{V}{As^2}) + 0 & \frac{1}{2} \frac{As}{V} \cdot (-6 \frac{V}{As^2}) + 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{As}{V} \cdot (-2 \frac{V}{As^2}) + \frac{1}{3} s \cdot 6 \frac{1}{s^2} & -\frac{1}{2} \frac{As}{V} \cdot (-6 \frac{V}{As^2}) + \frac{1}{3} s \cdot (-12 \frac{1}{s^2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \frac{1}{s} & -3 \frac{1}{s} \\ 3 \frac{1}{s} & -1 \frac{1}{s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = (-1 \pm 3j) \frac{1}{s}$ sind, gilt es für α und β , $\alpha = \text{Re}(\lambda_1) = -1$ und $\beta = \text{Im}(\lambda_1) = 3$.

Vergleicht man diese Werte mit den Einträgen von $\underline{\underline{\Lambda}}'$, so merkt man, dass $\underline{\underline{\Lambda}}'$ genau die erwartete Gestalt besitzt. Dadurch kann man schlussfolgern, dass Q' richtig berechnet wurde.

g) Die Stabilität der Schaltungen 1. Grades haben wir damals gegeben gehabt, wenn die Zeitkonstante τ positiv ist, da dann die Exponentialfunktion in der Lösung $x(t) = x_{\infty} + [x_0 - x_{\infty}] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ gegen Null konvergiert für den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$. Die Lösung selbst konvergiert dann offensichtlich gegen den BGP x_{∞} . Die Stabilität ergibt sich also, wenn die Exponentialfunktionen in der Lösung für $t \rightarrow \infty$ abklingen. Analog findet man in den Lösungsansätzen für Schaltungen 2. Grades Exponentialfunktionen. Ein beispielhafter Ansatz, der für Schaltungen mit komplex konjugierten Eigenwerten gilt, lautet:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) q_r - \sin(\beta t) q_i] + c_2 e^{\alpha t} [\sin(\beta t) q_r + \cos(\beta t) q_i].$$

Für die Stabilität müssen beide Summanden für $t \rightarrow \infty$ abklingen. Das ist nur dann gewährleistet, wenn $\alpha = \text{Re}(\lambda) < 0$ gilt. Auch bei anderen Ansätzen klingen i.A. die Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ für negative λ , bzw. wenn $\text{Re}(\lambda) < 0$ ab. Der Imaginärteil erzeugt eine Schwingung und verursacht weder Ab- noch Aufklingen mit $e^{j\beta t}$ ist daher für Stabilität unwichtig. Allgemein gilt also, dass die Stabilität gegeben ist, wenn $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i gilt. Diese Regel gilt auch für Systeme höheren Grades.

In diesem Fall lauten die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = (-1 + 3j) \frac{1}{s}$, $\lambda_2 = (-1 - 3j) \frac{1}{s}$. Offensichtlich gilt $\alpha = \text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = -1 < 0$. Deswegen ist die Schaltung stabil.

h) Der Ansatz für die allgemeine Lösung der Schaltungen 2. Grades mit komplex konjugierten Eigenwerten ist oben gegeben. Die benötigten Parameter α, β, q_r, q_i sind schon gegeben, bzw. berechnet als:

$$\lambda_{1,2} = (-1 \pm 3j) \frac{1}{s} \Rightarrow \alpha = -1 \frac{1}{s}, \beta = 3 \frac{1}{s}, q_r = \frac{2\Omega}{3} \frac{1}{s}, q_i = \frac{0}{-3} \frac{1}{s}$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung:

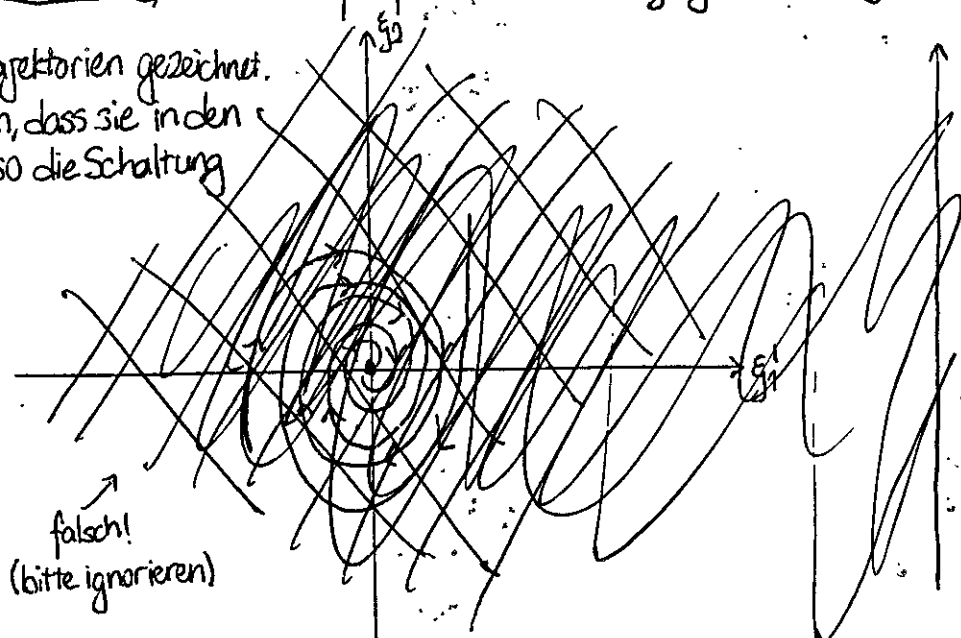
$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\frac{\pm t}{s}} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3t}{s}\right) \cdot \frac{2\Omega}{3} \\ \sin\left(\frac{3t}{s}\right) \cdot \frac{0}{-3} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} + c_2 e^{\frac{\mp t}{s}} \cdot \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{3t}{s}\right) \cdot \frac{2\Omega}{3} \\ \cos\left(\frac{3t}{s}\right) \cdot \frac{0}{-3} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

1) Das Phasenportrait ist die Gesamtheit aller Trajektorien, die jeweils beginnend von einem Anfangswert x_0 den Verlauf der Lösung der Zustandsgleichung darstellen. Natürlich zeichnet man aber nur einige Trajektorien um den Verlauf der Lösung qualitativ darzustellen. Die Trajektorien kann man analytisch bestimmen, indem die Lösung in dem transformierten Zustandsraum mit laufender Zeit gezeichnet wird. Diese können auch numerisch bspw. mit MATLAB generiert werden. In Schaltungstechnik 2 bedient man sich aber eigentlich die Tabellen aus Seiten 56 und 57 aus Skript, indem man mithilfe der Eigenwerte den Typ des Phasenportraits aus S.56 bestimmt und das entsprechende Phasenportrait in S.57 in ξ_1 - ξ_2 , bzw. vor allem in unserem Fall mit komplex konjugierten Eigenwerten in ξ_1 - ξ_2 -Ebene hinzeichnet. Die Transformation auf Normalform hilft allgemein bei der Zeichnung der Phasenportraits weiter, da die in ξ -Raum nicht verzerrt sind. In ξ -Ebene entsprechen die Richtungen der Eigenvektoren, bzw. im Falle der Jordan-Normalform eines Eigen- und eines Hauptvektors, bzw. im Falle reellwertiger Normalform die der Vektoren g_r und $-g_i$, der Achsen. Geht man in x -Ebene über, so ist das Phasenportrait verzerrt da die Eigenvektoren nicht den Achsen entsprechen (siehe Teilaufgabe 1). Deswegen benötigt man die transformierte Lösung, wenn man die Trajektorien analytisch bestimmen möchte. Außerdem ~~erklärt~~ ^{erklärt} die Transformation autonomer Systeme in Homogene dafür, dass in ξ -Ebene der Gleichgewichtspunkt immer im Ursprung ist. Wenn also eine autonome Erregung vorhanden ist, ist das Phasenportrait in x -Ebene, die um x_{ps} (GGP) verschobene Variante des Phasenportraits in ξ -Ebene.

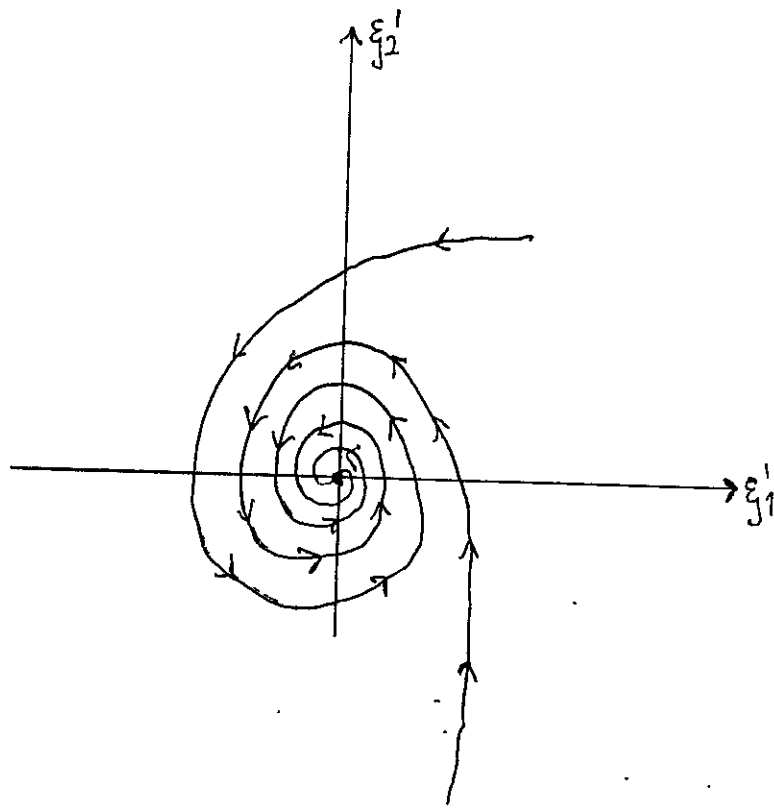
Kommt man wirklich zur Teilaufgabe 1), so gilt wegen komplex konjugierten Eigenwerten mit negativem Realteil, also $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = -1 \pm j3$ ($\alpha = -1 < 0$), der Fall 1, d.h. ~~der~~ ^{der} GGP ist ein stabiler Strudel, das Phasenportrait schaut in ξ_1 - ξ_2 -Ebene folgendermaßen aus:

Auf der nächsten Seite

~~es~~ sind zwei Trajektorien gezeichnet. Die Pfeile deuten an, dass sie in den GGP einlaufen, also die Schaltung stabil ist.



weiter mit 1):



1) Die Rücktransformation der Lösung in ξ -Ebene zu x -Ebene findet durch die Vorschrift $x = Q^{-1} \xi$ statt. In Mathematik entspricht eine Multiplikation mit einer Matrix allgemein einer Drehstreckung. Da das System an sich schon homogen ist, findet keine Verschiebung des Phasenportraits aus ξ -Ebene statt, der GGP in x -Ebene ist wie in Teilaufgabe b) bestimmt, $u_1 = 0, u_2 = 0$. Die Drehstreckung durch die Matrix $Q = [q_r \quad -q_i]$ verursacht die Verzerrung des Phasenportraits in dem Sinne, dass q_r und $-q_i$, wie die Achsen vorgestellt werden. Der stabile Strudel ist dann geeignet zu strecken bzw. stauchen. Das Phasenportrait in x_1, x_2 -Ebene (bzw. u_1, u_2 -Ebene) sieht dann folgendermaßen aus:

$$q_r = \frac{2\Omega}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

$$-q_i = \frac{0}{3} \cdot \frac{1}{5}$$

