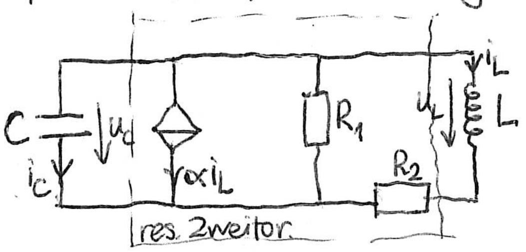
MUSTERLÖSUNG - Übungsblatt 7

A1)
In diesem Übungsblatt bzw. dieser GOP-Aufgabe geht es zuerst um die Beschreibung einer Schaltung mit Hilfe eines Differentialgleichungssystems. Der zweite Teil der Aufgabe beschäftigt sich dann hauptsächlich mit der Charakterisierung und Darstellung des dynamischen Verhaltens der vorliegenden reaktiven Schaltung 2. Grades mittels der Eigenwerte und Phasenportraits. Diese Aufgabe illustriert vor allem die Tatsache, wie man mit Hilfe eines Parameters, den man bspw. durch ein manipulierbares Bauelement einbaut, das dynamische Verhalten einer Schaltung einstellen kann. Manipulierbare Bauelemente können bspw. ein Potentiometer oder eine gesteuerte Quelle mit einstellbarem Verstärkungsfaktor sein.

a) Der erste Schritt um eine Zustandsbeschreibung herzuleiten, ist wie immer die Bestimmung des Zustandsvektors. Da in der vorliegenden Schaltung eine lineare Kapazität und eine lineare Induktivität vorkommen, ist der Zustandsvektor dementsprechend:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}.$$

b) Um nun für die gegebene Schaltung mit obigem Zustandsvektor die Zustandsbeschreibung in der Form $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} + \underline{v}$ herzuleiten, soll die Schaltung mittels KCL, KVL, Bauelementegleichungen analysiert werden. Man kann direkt mathematisch arbeiten und alles „by inspection" machen, oder kann man ganz ordentlich zuerst die Schaltung in ein resistives Zweitor mit zwei externen Reaktanzen umformen und dann die geeignete Zweitorbeschreibung bestimmen. Diese zwei Vorgehensweisen unterscheiden sich in diesem Fall nicht, da die Schaltung sich schon in der Form eines resistiven Zweitors mit zwei externen Reaktanzen befindet:



An dieser Stelle hilft eine Vorüberlegung über die Eigenschaften des resistiven Zweitors weiter. Erstens kommen in diesem Zweitor keine unabhängige Quellen vor, d.h., dass die Schaltung quellenfrei ist. Daraus folgt natürlich auch, dass es keine Erregung vorhanden oder anders gesagt, das System homogen ist und dementsprechend der Erregungsvektor $\underline{v}$ verschwindet; $\underline{v} = \underline{0}$. Zweitens befinden sich in dem resistiven Zweitor nur lineare Bauelemente, konkreter zwei Widerstände und eine gesteuerte Quelle. Die Linearität mit der Quellenfreiheit ergibt offenkundig strenge Linearität. Deswegen ist die Beschreibung der Schaltung mit Hilfe einer Zweitormatrix möglich.

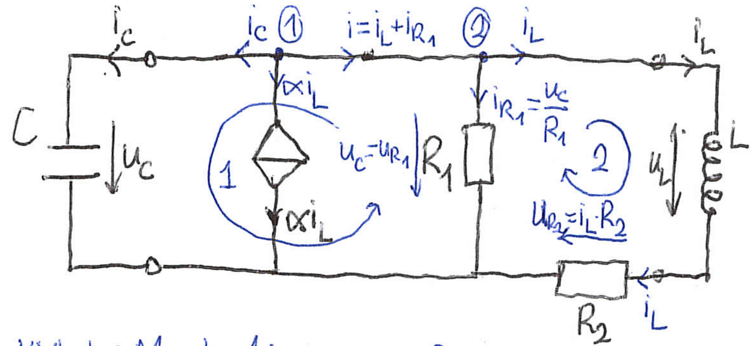
Bedient man sich zuerst die Reaktanzgleichungen, so ergibt sich in Matrix-Vektor-Notation:

$i_C = C \cdot \dot{u}_C \iff \dot{u}_C = \frac{1}{C} i_C$ (Vorsicht: hier kein negatives Vorzeichen!)

$u_L = L \cdot \dot{i}_L \iff \dot{i}_L = \frac{1}{L} u_L$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix}$$

Nun soll wie üblich die geeignete Zweitorbeschreibung, die in diesem Fall die inverse Hybridbeschreibung ist, bestimmt werden, um die unerwünschten Größen i_C und u_L zu eliminieren. Dazu nutzt man wie immer KCL, KVL und Bauelementegleichungen. Die inverse Hybridbeschreibung hat in diesem Fall die Form: $\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ -i_L \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$



Konkreter gesagt, braucht man in diesem Fall nicht die inverse Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}'$ direkt, sondern die Beziehung zwischen $\begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$.

KVL bei Masche 1: $u_C - u_{R_1} = 0 \Leftrightarrow u_C = u_{R_1}$

Ohmsch. Gesetz: $i_{R_1} = \frac{u_{R_1}}{R_1} = \frac{u_C}{R_1}$

KCL bei ②: $i - i_L - i_{R_1} = 0 \Leftrightarrow i = i_L + \frac{u_C}{R_1}$

KCL bei ①: $-i - i_C - \alpha i_L = 0 \Rightarrow \underline{i_C} = -i - \alpha i_L = \underline{-i_L - \alpha i_L - \frac{u_C}{R_1}}$

Ohmsch. Gesetz: $u_{R_2} = i_L \cdot R_2$

KVL bei 2: $u_L + u_{R_2} - u_{R_1} = 0$

$\Rightarrow \underline{u_L} = u_{R_1} - u_{R_2} = \underline{u_C - i_L \cdot R_2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} i_C = \frac{-1}{R_1} u_C + (-1-\alpha) i_L \\ u_L = u_C - R_2 i_L \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1} & -(1+\alpha) \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Setzt man anschließend diese Beschreibung ein, so ergibt sich die Zustandsgleichung zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1} & -(1+\alpha) \\ 1 & -R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & -\frac{1+\alpha}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$, wobei $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & -\frac{1+\alpha}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix}$ und $\underline{v} = \underline{0}$ gilt.

c) In dem Rest dieser Aufgabe wird eine andere Schaltung mit der Zustandsbeschreibung $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 2+\beta & \frac{4}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}$ betrachtet. Um dieses System zu charakterisieren, ist der erste Schritt die Berechnung der Eigenwerte, die mithilfe der Spur T und Determinante Δ erfolgt.

$T = a_{11} + a_{22} = 2 + \beta + 2 = 4 + \beta$, $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = (2+\beta) 2 - \frac{4}{3} (-3) = 4 + 2\beta + 4 = 8 + 2\beta$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(4+\beta)^2}{4} - 8 - 2\beta} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{16 + 8\beta + \beta^2 - 32 - 8\beta}{4}} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - 16}{4}}$$

Diese Methode mit Spur und Determinante ist für Schaltungstechnik 2 ausreichend, da keine Schaltungen größeren Grades als 2 vorkommen und diese Vorschrift nur für Schaltungen zweiten Grades bzw. für 2x2-Matrizen gilt. Die allgemeine Vorgehensweise um die Eigenwerte einer beliebig großen quadratischen Matrix mithilfe des charakteristischen Polynoms wird hier zusätzlich diskutiert. Diese ist vor allem für Mathematik-Vorlesung wichtig.

Das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix ist definiert als $\det(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})$, wobei $\underset{\sim}{A}$ die quadratische Matrix und $\underset{\sim}{I}$ die Einheitsmatrix von derselben Größe wie $\underset{\sim}{A}$ bezeichnet. In unserem Fall errechnet sich das folgendermaßen:

$$\det(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I}) = \left|\begin{bmatrix} 2+\beta & \frac{4}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2+\beta-\lambda & \frac{4}{3} \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2+\beta-\lambda)(2-\lambda) - \frac{4}{3}(-3)$$

$$= 4-2\lambda+2\beta-\beta\lambda-2\lambda+\lambda^2+4 = \lambda^2-(4+\beta)\lambda+8+2\beta.$$

Eigenwerte der Matrix $\underset{\sim}{A}$ sind als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms definiert. Man soll also ~~das~~ obige Polynom gleich zu Null setzen und mithilfe der p-q-Formel die Nullstellen bestimmen. In diesem Fall gilt ~~.~~ $p=-(4+\beta)$ und $q=8+2\beta$. Setzt man diese in die p-q-Formel ein, so bekommt man die Eigenwerte von $\underset{\sim}{A}$, die logischerweise mit den oben bestimmten EWen übereinstimmen.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(-(4+\beta))^2}{4}-8-2\beta} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{16+8\beta+\beta^2-32-8\beta}{4}} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}$$

d) Ab jetzt soll ~~...~~ untersucht werden, welche dynamische Verhaltensweisen ~~...~~ das vorliegende System für verschiedene Werte von $\beta\in\mathbb{R}$ zeigt. Zuerst soll der Wertebereich von β gegeben werden, in dem die Schaltung als Phasenportrait einen Sattelpunkt hat. Betrachtet man die Tabelle im Skript, so sollen zwei Bedingungen erfüllt sein, damit das Phasenportrait ein Sattelpunkt (Nummer 6) wird. Diese sind:

- $\lambda_{1,2}\in\mathbb{R}$ mit $\lambda_1\neq\lambda_2$ und
- $\operatorname{sgn}\lambda_1\neq\operatorname{sgn}\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1<0<\lambda_2$

Die erste Bedingung erfordert, dass die beiden Eigenwerte reell ~~...~~ und ungleich sind. Ungleichheit ist dann erfüllt, wenn der Teil im Wurzel nicht verschwindet. Daraus folgt:

$$\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}} \neq 0 \Leftrightarrow \beta^2-16\neq 0 \Leftrightarrow \beta^2\neq 16 \Leftrightarrow \boxed{\beta\neq\pm 4}$$

Die Eigenwerte sind dann reell, wenn ~~das~~ Argument des Wurzels nicht negativ ist. Das ergibt:

$$\frac{\beta^2-16}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-16\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2\geq 16 \Leftrightarrow |\beta|\geq 4 \Leftrightarrow \boxed{-4\geq\beta \text{ oder } \beta\geq 4}$$

Die zweite Bedingung erfordert, dass die Vorzeichen der Eigenwerte unterschiedlich sind. Dafür soll offensichtlich gelten, dass der Summand im Wurzel ~~...~~ betragsmäßig größer als der andere Summand ist, damit einmal addiert, einmal subtrahiert sich EWe mit unterschiedlichen Vorzeichen ergeben.

$$\left|\frac{4+\beta}{2}\right| < \left|\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{4+\beta}{2}\right|^2 < \left|\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}\right|^2 \Leftrightarrow \frac{16+8\beta+\beta^2}{4} < \frac{\beta^2-16}{4} \Leftrightarrow 16+8\beta+\cancel{\beta^2} < \cancel{\beta^2}-16$$

$$\Leftrightarrow 8\beta<-32 \Leftrightarrow \boxed{\beta<-4}$$

Alle diese Bedingungen zusammen besagen, dass $\beta<-4$ gelten muss, damit das Phasenportrait ein Sattelpunkt wird.

$$\Rightarrow \boxed{\beta<-4}$$

e) Analog sollen nun die Bedingungen für einen stabilen Strudelpunkt aufgeschrieben und die Werte von β, für die diese gelten, untersucht werden. Die Tabelle aus S. 56 des Skriptums sagt:

• $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}$ und • $\alpha < 0, \beta > 0$

Die erste Bedingung besagt, dass die beiden Eigenwerte komplex konjugiert sein sollen. In unserem Fall ergeben sich komplexe Eigenwerte, wenn das Argument des Wurzels negativ ist. Daraus folgt:

$$\frac{\beta^2-16}{4} < 0 \iff \beta^2-16<0 \iff \beta^2<16 \iff |\beta|<4 \iff \boxed{-4<\beta<4}$$

Die zweite Bedingung setzt voraus, dass der Realteil negativ ist. Da die obige erste Bedingung schon dafür sorgt, dass das Argument des Wurzels negativ ist, bildet der zweite Summand den Imaginärteil und der Realteil setzt sich deshalb nur aus dem ersten Summand zusammen. Daher muss für einen negativen Realteil folgendes gelten:

$$\frac{4+\beta}{2} < 0 \iff 4+\beta<0 \iff \boxed{\beta<-4}$$

Dieser ist aber ein Widerspruch zu dem Resultat der ersten Bedingung. Das heißt, dass die beiden Bedingungen für einen stabilen Strudelpunkt nicht gleichzeitig erfüllt werden können, und für die vorliegende Zustandsbeschreibung es nicht möglich ist, mittels Variation von β einen stabilen Strudelpunkt als Phasenportrait zu erzeugen.

f) Laut der Tabelle lauten die beiden Bedingungen für einen instabilen Knotenpunkt als Phasenportrait folgendermaßen:

• $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ und • $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Die erste Bedingung entspricht genau der ersten Bedingung aus Teilaufgabe d), deshalb ergibt sich der gleiche Wertebereich von β, in dem diese erfüllt ist. Greift man also auf seine Antwort zurück, so gilt: $\boxed{\beta<-4 \text{ oder } \beta>4}$, damit die EWe reell und ungleich sind.

Die zweite Bedingung besagt, dass die beiden Eigenwerte positiv sein sollen. Da der zweite Summand Wurzel eines Arguments ist, ist dieser immer positiv, wenn der reell ist, was aber mit der ersten Bedingung gewährleistet ist. Also gilt es $\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}} > 0$ offensichtlich. Da dieser positive Term für λ_1 auf den ersten Summand addiert wird und für λ_2 von dem ersten Summand subtrahiert wird, gilt $\lambda_1 > \lambda_2$. Mathematisch ausgedrückt:

$$\lambda_1 = \frac{4+\beta}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}}_{>0} > \lambda_2 = \frac{4+\beta}{2} - \underbrace{\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}}_{>0}$$

Das heißt, wenn $\lambda_2 > 0$ gilt, dann $\lambda_1 > 0$ automatisch auch gilt. Wir sollen also dafür sorgen, dass $\lambda_2 > 0$ gilt, damit die zweite Bedingung erfüllt wird.

$$\lambda_2 = \frac{4+\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}} > 0 \iff \frac{4+\beta}{2} > \sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}} \iff \left(\frac{4+\beta}{2}\right)^2 > \sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}^2 \iff \frac{16+8\beta+\beta^2}{4} > \frac{\beta^2-16}{4}$$

$$\iff 16+8\beta+\cancel{\beta^2} > \cancel{\beta^2}-16 \iff 8\beta > -32 \iff \boxed{\beta>-4}$$

Also wenn $\beta > -4$ gilt, gilt auch $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Die beiden Wertebereiche zusammen ergeben $\boxed{\beta>4}$ als Bedingung, damit das Phasenportrait ein instabiler Knoten ist.

g) Im Rahmen dieser Teilaufgabe soll die Schaltung mit $\beta=-5$ untersucht werden. Mit den Kenntnissen aus vorherigen Teilaufgaben kann man schon schlussfolgern, dass da $\beta=-5<-4$ gilt, sich als Phasenportrait ein Sattelpunkt ergibt. Setzt man $\beta=-5$ in die Eigenwertegleichung ein, so ergeben sich die Eigenwerte zu:

$$\lambda_{1,2}=\frac{4+\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}}=\frac{4-5}{2}\pm\sqrt{\frac{(-5)^2-16}{4}}=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\frac{25-16}{4}}=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{-1}{2}\pm\frac{3}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1=\frac{2}{2}=1}\,,\ \underline{\lambda_2=\frac{-4}{2}=-2}$$

Die Eigenvektoren von $\underset{\sim}{A}$ lassen sich mit früher diskutierter Vorschrift folgendermaßen berechnen:
Es gilt $\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}-3 & \frac{4}{3}\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ für $\beta=-5$ und damit $a_{12}\neq 0$.

$$\Rightarrow q_1=\begin{bmatrix}-a_{12}\\ a_{11}-\lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -4\end{bmatrix}\quad,\quad q_2=\begin{bmatrix}-a_{12}\\ a_{11}-\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -3-(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -1\end{bmatrix}$$

Diese Methode ist für ST2 ausreichend, da nur Schaltungen ersten und zweiten aber nicht höheren Grades betrachtet werden. Trotzdem wird jetzt zusätzlich die allgemein gültige Vorgehensweise durchgeführt, um zu zeigen, dass die beiden Vorschriften auf gleiche Eigenvektoren führen. Es muss dabei darauf hingewiesen werden, dass die Eigenvektoren mit einer Konstante $c\neq 0$ beliebig skalierbar sind, also bspw. $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ gleiche Eigenvektoren (richtiger gesagt Eigenrichtungen) sind.

Die allgemein gültige Variante beruht auf die Definition der Eigenvektoren mit $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})q=0$. Man bildet also das Gleichungssystem und bestimmt q mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens (auf Zeilenstufenform bringen und auflösen).

$$q_1:\ (\underset{\sim}{A}-\lambda_1\underset{\sim}{I})q_1=0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}-3 & \frac{4}{3}\\ -3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)q_1=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4 & \frac{4}{3}\\ -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_{11}\\ q_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Gauß-Jordan-Verf.:

$$\begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}-4 & \frac{4}{3} & 0\\ -3 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{in (II)}]{\frac{-3}{4}(I)+(II)}\left(\begin{array}{cc|c}-4 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow q_{12}=s\ \text{(Variable)}\Rightarrow -4q_{11}+\frac{4}{3}s=0\Rightarrow q_{11}=\frac{s}{3}$$

s ist beliebig zu wählen außer Null. $\Rightarrow q_1\overset{s=1}{=}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}$ oder für $\underline{s=-4}$: $q_1=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -4\end{bmatrix}$

$$q_2:\ (\underset{\sim}{A}-\lambda_2\underset{\sim}{I})q_2=0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix}-3 & \frac{4}{3}\\ -3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\right)q_2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-1 & \frac{4}{3}\\ -3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_{21}\\ q_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Gauß-Jordan-Verf.:

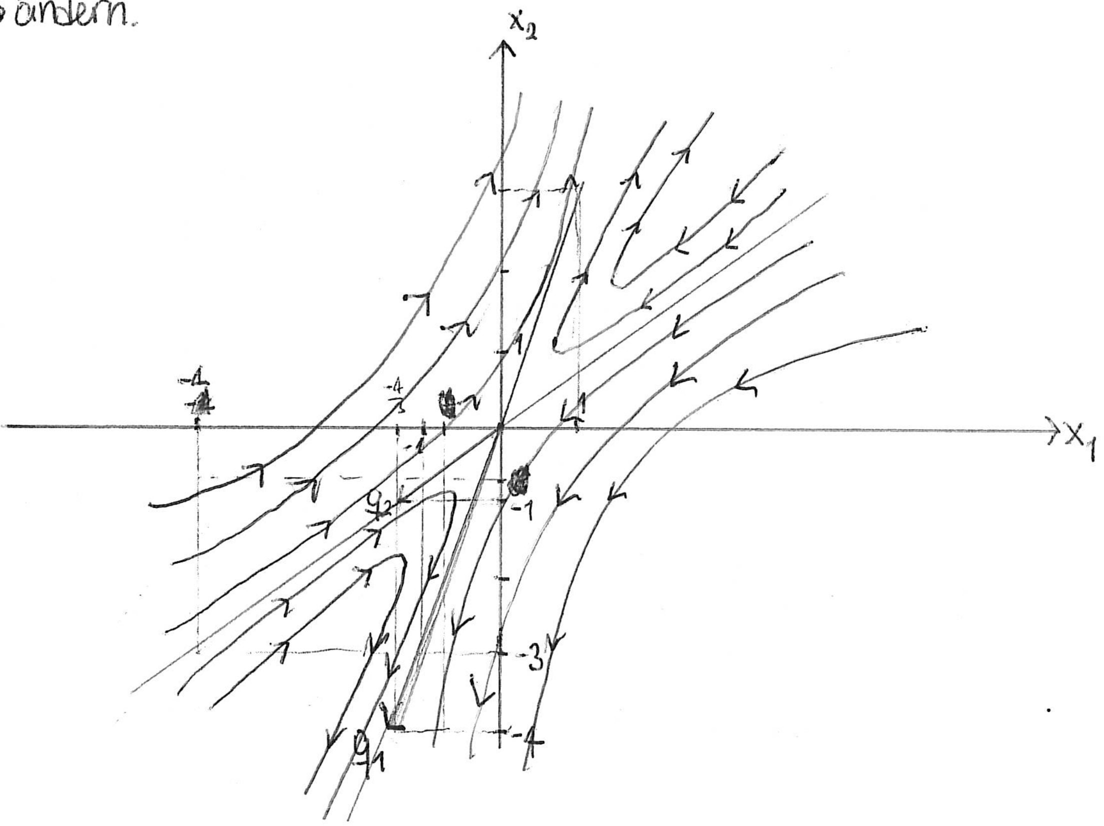
$$\begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & \frac{4}{3} & 0\\ -3 & 4 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[\text{in (II)}]{-3(I)+(II)}\left(\begin{array}{cc|c}-1 & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow q_{22}=s,\ q_{21}=\frac{4s}{3}\Rightarrow q_2\overset{s=1}{=}\begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\ 1\end{bmatrix}$$ oder für $\underline{s=-1}$: $q_2=\begin{bmatrix}\frac{-4}{3}\\ -1\end{bmatrix}$

Die Eigenvektoren sind also $\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\underline{q}_2 = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Der Gleichgewichtspunkt liegt offensichtlich wegen der Quellenfreiheit im Ursprung. Also gilt es:

$$\underline{x}_{GGP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

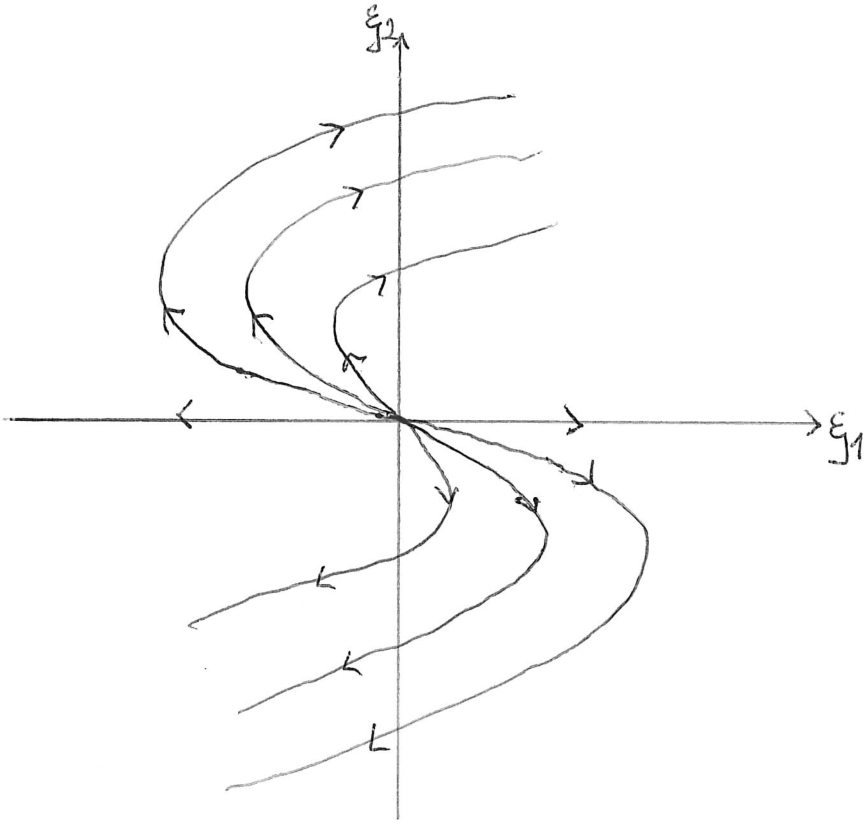
Wie oben erklärt und wie aus Eigenwerten ablesbar ist, ist das Phasenportrait ein Sattelpunkt mit dem Gleichgewichtspunkt im Ursprung. Die Trajektorien beim Sattelpunkt kommen aus der zum negativen EW (hier λ_2) gehörenden Koordinatenrichtung und schmiegen sich an die zum positiven EW (hier λ_1) gehörende Koordinatenrichtung an. Also soll man in x_1-x_2-Ebene die Eigenvektoren q_1 und q_2 einzeichnen und das Phasenportrait für Sattelpunkt im Skript auf S. 57 dementsprechend verzerrt eintragen. Dabei sollen die Pfeile auf Trajektorien so eingetragen werden, dass die Trajektorien ihre Richtung von der Richtung von q_2 zu der Richtung von q_1 ändern.



h) Analog setze man nun $\beta = 4$ in die Formel für Eigenwerte an und bestimme diese:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4+\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2-16}{4}} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{16-16}{4}} = 4 \implies \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 4}$$

Es ergibt sich also zwei gleiche Eigenwerte, die jeweils positiv sind, $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Das heißt erstens natürlich, dass das System instabil ist, da die Eigenwerte positiv sind und die Lösung für $t \to \infty$ aufklingt. Zweitens heißt das, dass die Systemmatrix $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & \frac{4}{3} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ in diesem Fall nicht diagonalisierbar ist, also eine Transformation auf Normalform nicht möglich ist. In diesem Fall benutzt man die <u>Transformation auf Jordan-Normalform</u>. Das Phasenportrait in ξ-Ebene entspricht dem Fall Nummer 8 aus dem Skript und sieht wie folgt aus:


ξ_2
ξ_1