

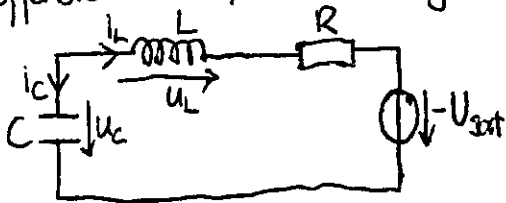
MUSTERLÖSUNG-Übungsblatt 9

A1) In der dritten Übungsaufgabe haben wir uns mit Sprungphänomenen bei Schaltungen ersten Grades, die Totpunkte in ihren Kennlinien besitzen, beschäftigt. Dabei war die Aussage, dass der einzige Ausweg aus Totpunkten ein Sprung aus diesem unter Beachtung der Stetigkeit der Zustandsgröße (u_C bei Kap., i_L bei Ind.) ist und deswegen haben wir den dynamischen Pfad so fortgesetzt. Der Grund für diese problematische Situation, nämlich die Existenz der Totpunkte ist eigentlich wieder eine überidealisierte Modellierung. Deswegen betrachtet man beispielsweise in unserer Schaltung auch die Induktivität der Zuleitungsdrähte L , die nun eine feinere Analyse dieser Konfliktsituation mithilfe eines Phasenportraits ermöglicht. Das Ziel dieser Aufgabe ist also die Lösung dieser Konfliktsituation mittels Sprungphänomene zu rechtfertigen, wobei die Schaltung hinreichend detailliert modelliert wird, nämlich als Relaxationsoszillator. Relaxationsoszillatoren bilden einen Spezialfall der stückweise linearen Oszillatoren, die aus einer Kapazität, Induktivität und einem nichtlinearen resistiven Bauelement mit stückweise linearer Kennlinie bestehen. Für den Grenzfall $L \rightarrow 0$ ergibt sich nämlich ein Relaxationsoszillator, der einen trapezförmigen Grenzzyklus besitzt, an den sich die anderen Trajektorien un nähern. Dieser Schaltungsaufbau eignet sich hervorragend für diese Analyse, da bei der Schaltung aus Übungsblatt 3 auch ein stückweise lineares resistives Bauelement gab.

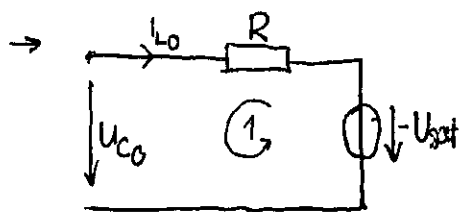
a) Die vorliegende Schaltung hat einen stückweise linearen Widerstand mit der Kennlinie:

$$u_F = r(i_F) = \begin{cases} R i_F - U_{\text{sat}}, & \text{Bereich I, } i_F > I_0 \\ -R i_F, & \text{Bereich II, } I_0 > i_F > -I_0 \\ R i_F + U_{\text{sat}}, & \text{Bereich III, } -I_0 > i_F \end{cases}$$

Um das ESB der Schaltung mit F im Bereich I zu zeichnen, soll man also F geeignet ersetzen, indem die Gleichung $R i_F - U_{\text{sat}}$ mit geeigneten Bauelementen realisiert wird. Da dieser Ast der Kennlinie eine Gerade darstellt, also linear ist, kann man sie mit einem Helmholtz-Thévenin-ESB ersetzen, also mit einem Widerstand und einer Spannungsquelle, die in Reihe geschaltet sind. Der Widerstand an sich ist streng linear und ~~geht durch den Ursprung~~ seine Kennlinie geht durch den Ursprung. Die Spannungsquelle sorgt für die Verschiebung dieser geradenförmigen Kennlinie. Die Spannungsquelle bei Helmholtz-Thévenin-ESB hat die Leerlaufspannung als ihren u -Wert. Bei Leerlauf gilt offensichtlich $i_F = 0$ und daraus folgt: $U_q = -U_{\text{sat}}$. Der Widerstand entspricht dem Innenwiderstand R_i , der sich aus dem Quotient $\frac{u}{i}$ errechnen lässt, wobei U_q zu Null gesetzt wird. Also gilt offensichtlich $R_i = R$. Damit ergibt sich das ESB zu:



Um den GGP $x_{0q,I}$ graphisch zu bestimmen, sollen bekannterweise die Kapazität mit einem Leerlauf und die Induktivität mit einem Kurzschluss ersetzt werden. Die Leerlaufspannung u_{C0} und der Kurzschlussstrom i_{L0} , die mit KCL & KVL berechnet werden können, entsprechen dann den Koordinaten des GGPs $x_{0q,I}$.

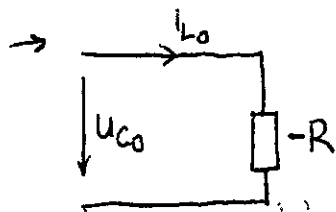


$$i_{L0} = 0$$

$$\text{KVL bei } \odot: u_{c0} + U_{\text{sat}} - \underbrace{i_{L0} R}_{=0} = 0 \Leftrightarrow u_{c0} = -U_{\text{sat}}$$

$$\Rightarrow \underline{x_{\infty, I}} = \begin{bmatrix} -U_{\text{sat}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Für das nun gegebene ESB soll wieder durch das Ersetzen ~~von~~ von C mit LL und von L mit KS der GGP jetzt für den Bereich II ermittelt werden.



$$i_{L0} = 0 \Rightarrow u_{c0} = -R \cdot i_{L0} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x_{\infty, II}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Der Kennlinienast für den Bereich III ist wieder eine Gerade mit der Gleichung $R i_L + U_{\text{sat}}$. Für das Helmholtz-Thévenin-ESB gilt dann offenkundig $U_q = U_{\text{sat}}$ und $R_i = R$. Der einzige Unterschied zu dem ESB für Bereich I ist damit der Wert der Spannung der Spannungsquelle. Die ist nämlich nicht mehr $-U_{\text{sat}}$, sondern gilt $U_q = U_{\text{sat}}$. Daraus folgt für den GGP $\underline{x_{\infty, III}}$ logischerweise

$$\underline{x_{\infty, III}} = \begin{bmatrix} U_{\text{sat}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Damit ein Gleichgewichtspunkt real sein kann, muss er die Voraussetzungen aller Bauteile in der Schaltung erfüllen, also einen gültigen Betriebspunkt aller Kennlinien darstellen. Dabei sind vor allem die vorliegenden Fallunterscheidungen wichtig. Also ist das Fazit, dass die GGPs für jeweilige Bereiche die Voraussetzungen dieser Bereiche erfüllen müssen, um real existierende GGPs ~~zu~~ zu beschreiben.

Der erste GGP $\underline{x_{\infty, I}} = \begin{bmatrix} -U_{\text{sat}} \\ 0 \end{bmatrix}$, der im ersten Bereich ~~gültig~~ gültig ist, besitzt also die Koordinaten $u_c = -U_{\text{sat}}$ und $i_L = 0$, da ~~für~~ dem Zustandsgrößenvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix}$ gilt. Die Voraussetzung des ersten Bereichs, die von $\underline{x_{\infty, I}}$ erfüllt werden soll, damit er einen realen GGP darstellt, lautet $i_L > I_0 > 0$. Außerdem folgt aus einer trivialen KCL-Gleichung aus der Schaltung, dass $i_L = i_L$ gilt. Also gilt:

$$i_L = i_L = 0 \Rightarrow i_L > 0 \text{ ist nicht erfüllt.}$$

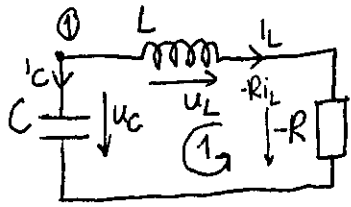
Da die Voraussetzung nicht erfüllt ist, ist $\underline{x_{\infty, I}} = \begin{bmatrix} -U_{\text{sat}} \\ 0 \end{bmatrix}$ ~~kein~~ kein realer bzw. ein virtueller GGP.

Ein virtueller GGP ist ein GGP, der existieren würde, falls der Bereich nicht mit dementsprechender Voraussetzung beschränkt wäre. Beispielsweise würden die Trajektorien ~~um~~ um einen stabilen virtuellen GGP sich bis zu den Bereichsgrenzen in gewöhnlicher Weise dem GGP annähern aber ihn nicht erreichen, da er außerhalb der Grenzen liegt. Außer der Grenzen würden sie dann den Eigenschaften des entsprechenden Bereichs gehorchen.

Der zweite GGP $\underline{x_{\infty, II}}$ hat die Koordinaten $u_c = 0$ und $i_L = 0$. Die Voraussetzung für Bereich II lautet $I_0 > i_L > -I_0$, also liegt $i_L = 0$ in dem Gültigkeitsbereich. Wegen $i_L = i_L = 0$ ist $\underline{x_{\infty, II}}$ dann ein realer GGP.

Der dritte GGP $\underline{x_{\infty, III}}$ hat die Koordinaten $u_c = U_{\text{sat}}$, $i_L = 0$ und muss die Voraussetzung $0 > -I_0 > i_L$ erfüllen. Aufgrund $i_L = i_L = 0$ ist das aber nicht der Fall und ist $\underline{x_{\infty, III}}$ ein virtueller GGP.

e) Nun soll das ESB für den Bereich II auf bekannter Weise analysiert werden. Der Zustandsvektor lautet nach wie vor $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$. Die Zustandsbeschreibung kann für Bereich II in Matrix-Vektor-Notation als $\dot{\underline{x}} = \underline{A}_{II} \underline{x} + \underline{b}_{II} v$ geschrieben werden, da die insgesamt nichtlineare Schaltung ~~ist~~ in diesem Bereich linear ist. Diese Beschreibung ~~ist~~ wieder mithilfe KCL-KVL-Gleichungen zu bestimmen.



Kapazität: $\dot{u}_C = \frac{1}{C} i_C$, KCL bei ①: $i_C = -i_L$
 Induktivität: $\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_L$, KVL bei ②: $-(-R i_L) - u_L + u_C = 0 \Rightarrow u_L = u_C + R i_L$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_C = -\frac{1}{C} i_L \\ \dot{i}_L = \frac{1}{L} u_C + \frac{R}{L} i_L \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Nach dem Hinweis gilt $v = U_{sat}$ für die Erregung. Da in diesem Fall keine Erregung in den Gleichungen aber vorkommt, gilt also für \underline{A}_{II} und \underline{b}_{II} :

$$\underline{A}_{II} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

f) Für die Eigenwerte berechnet man wieder zuerst die Spur T und die Determinante von \underline{A}_{II} :

$$\left. \begin{aligned} T &= 0 + \frac{R}{L} = \frac{R}{L} \\ \Delta &= 0 \cdot \frac{R}{L} - \frac{1}{L} \cdot \frac{-1}{C} = \frac{1}{LC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Mit dem bekannten Ansatz folgen dann wie oben die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$, $\lambda_2 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$. Um die Stabilität zu beurteilen, muss ~~es~~ auf das Kriterium für Eigenwerte ~~bei~~ Stabilität zurückgegriffen werden. Dieses ~~besagt~~ besagt, dass die Realteile aller Eigenwerte negativ sein sollen. In diesem Fall mit diesen zahlenmäßig unbekanntem Eigenwerten sollen zwei Fälle unterschieden werden:

- $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$: In diesem Fall ist der Argument der Wurzel negativ, also ist der zweite Summand der beiden Eigenwerte imaginär. Dadurch ergibt sich $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = \frac{R}{2L}$. Mit positiven Elementewerten $R > 0, L > 0$ gilt $\frac{R}{2L} > 0$. Deshalb ist ~~das~~ das System in diesem Fall instabil.
- $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$: In diesem Fall ist der Argument der Wurzel positiv und der Realteil besteht aus beiden Summanden, da die EWe rein reell sind. Mit positiven Elementewerten ist λ_1 offensichtlich positiv, da sowohl $\frac{R}{2L}$ als auch ~~die~~ Wurzel aus irgendwas positives positiv sind. Dadurch folgt, dass das System in diesem Fall auch instabil ist. Außerdem gilt auch $\lambda_2 > 0$, da $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$ gilt und $\frac{R}{2L} \geq \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ damit folgt.

Daraus folgt, dass die Schaltung im Bereich II für positive Elementewerte ~~es~~ instabil ist, wegen $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$.

g) Laut der Hinweise reicht die Herleitung einer Bedingung für Bauelementwerte durch die EWe aus, wobei die Eigenwerte als Phasenportrait einen Knoten ergeben sollen, damit die Schaltung ein Relaxationsoszillator darstellt. Für einen Knoten müssen die Eigenwerte rein reell und ungleich zueinander sein, wobei aber gleiche Vorzeichen haben. Die Gleichheit der Vorzeichen wird

eigentlich in der letzten Teilaufgabe gezeigt. Da $\sqrt{\frac{R^2-1}{4L^2 LC}} < \sqrt{\frac{R^2-1}{4L^2}} = \frac{R}{2L}$ gilt, haben beide Eigenwerte, bei den auf $\frac{R}{2L}$, $\sqrt{\frac{R^2-1}{4L^2 LC}}$ einmal addiert, einmal dieser davon subtrahiert wird, gleiche Vorzeichen, nämlich sind sie positiv. Für die Ungleichheit und damit die EWe rein reell werden, soll der Argument der Wurzel positiv sein. Also lautet die Bedingung, die durch die Bauelemente erfüllt werden muss, damit es sich um einen Relaxationsoszillator handelt;

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0 \Leftrightarrow \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \stackrel{\text{pos. Bauelemente}}{\Leftrightarrow} \frac{R^2}{4L} > \frac{1}{C} \Leftrightarrow \frac{R^2}{4} > \frac{L}{C} \Leftrightarrow \boxed{\frac{R}{2} > \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Dabei reicht schon eine der obigen Formen als korrekte Antwort.

Außerdem kann man hier für positive Elementwerte auch schlussfolgern, wegen $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ der Knoten ein instabiler Knoten ist.

h) Jetzt sind Bauelementwerte mit $C=0,5F, L=100mH, R=1,2\Omega, U_{sat}=10V$ zahlenmäßig gegeben. Die Formel für die Eigenwerte aus Teilaufgabe f) gilt natürlich immer noch. Man muss also die gegebenen Zahlenwerte lediglich in diese Formel einsetzen um die EWe von A_{II} zahlenmäßig zu bekommen.

$$\lambda_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{1,2\Omega}{2 \cdot 100mH} \pm \sqrt{\frac{(1,2\Omega)^2}{4(100mH)^2} - \frac{1}{100mH \cdot 0,5F}} = \frac{0,6\Omega}{0,1H} \pm \sqrt{\left(\frac{1,2\Omega}{2 \cdot 0,1H}\right)^2 - \frac{1}{0,1H \cdot 0,5F}}$$

$$= 6 \frac{V}{A} \cdot \frac{A}{Vs} \pm \sqrt{\left(\frac{6 \frac{V}{A} \cdot \frac{A}{Vs}}{0,05 \frac{Vs}{A} \cdot \frac{As}{Vs}}\right)^2 - \frac{1}{0,1 \frac{Vs}{A} \cdot \frac{As}{Vs}}} = 6 \frac{1}{s} \pm \sqrt{36 \frac{1}{s^2} - 20 \frac{1}{s^2}} = 6 \frac{1}{s} \pm \sqrt{16 \frac{1}{s^2}} = 6 \frac{1}{s} \pm 4 \frac{1}{s}$$

$0,05 = \frac{1}{20}, \frac{1}{20} = 0,05$

Also lauten die Eigenwerte $\lambda_1 = 10 \frac{1}{s}, \lambda_2 = 2 \frac{1}{s}$, die wegen positiver Elementwerte wie erwartet positiv sind.

i) Um die Eigenvektoren mit dem bekannten Ansatz zu berechnen soll die Matrix A_{II} , deren formelmäßige Darstellung aus Teilaufgabe e) immer noch gilt, durch das Einsetzen der gegebenen Elementwerte zahlenmäßig bestimmt werden.

$$A_{II} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{0,5F} \\ \frac{1}{100mH} & \frac{1,2\Omega}{100mH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \frac{V}{As} \\ \frac{1}{0,1H} & \frac{12 \frac{V}{As}}{0,1 \frac{Vs}{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \frac{V}{As} \\ 10 \frac{A}{Vs} & 12 \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

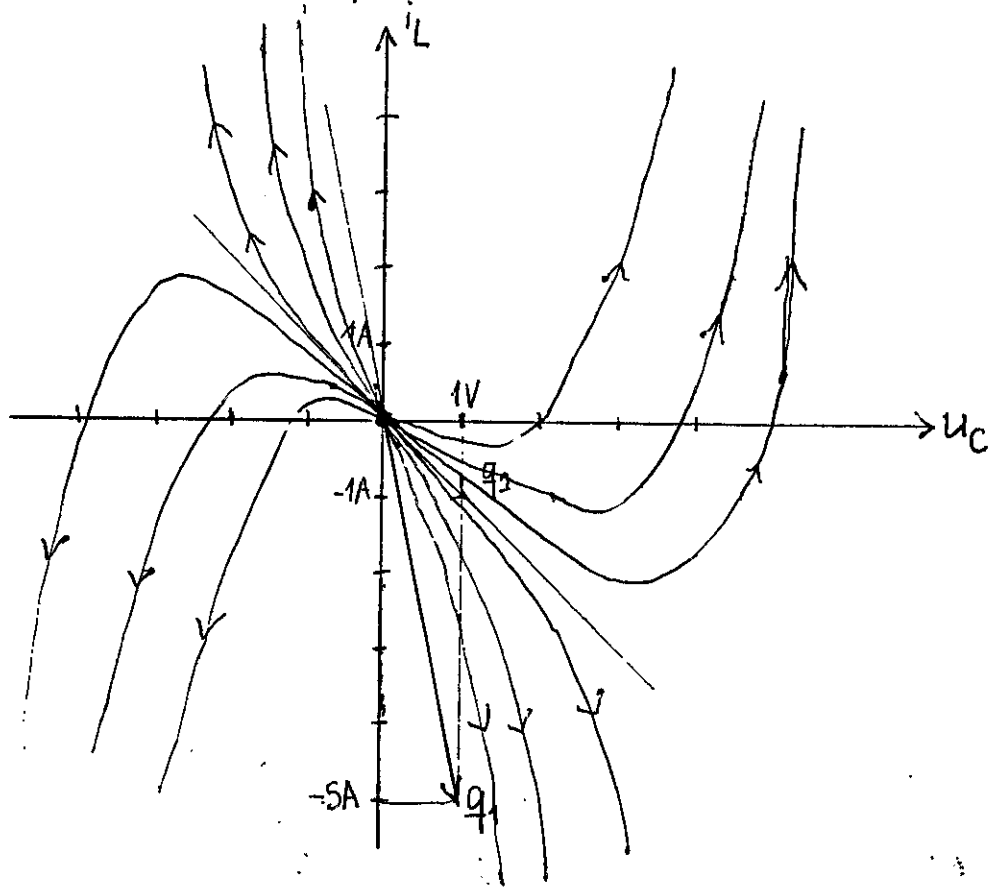
Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $a_{12} \neq 0$ gelten kann man die Eigenvektoren bekannterweise wie folgt berechnen:

$$q_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{V}{As} \\ 0 - 10 \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{V}{As} \\ -10 \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \frac{V}{As} \\ -2 \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Um die Eigenvektoren bei der Zeichnung des Phasenportraits einfacher in $u_C - i_L$ -Ebene eintragen zu können, ist eine geeignete Skalierung hilfreich. Bspw. kann q_1 mit $\frac{1}{2}As$ und q_2 auch mit $\frac{1}{2}As$ skaliert werden. Daraus folgt: $q_1 = \begin{bmatrix} 1V \\ -5A \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 1V \\ -1A \end{bmatrix}$.

Die oben berechneten Eigenvektoren sind natürlich auch richtige Antworten.

j) Da nun die Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt sind, kann das Phasenportrait für das ESB in u_C - i_L -Ebene skizziert werden. Es gilt $\lambda_1 = 10 \frac{1}{s} > 0$, $\lambda_2 = 2 \frac{1}{s} > 0$ und damit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Daraus folgt wie vorher überlegt, dass das Phasenportrait ein instabiler Knoten ist. Die Lage des GGPs für den Bereich II, in dem ja das untersuchte ESB gültig ist, wird schon als $\underline{x}_{\text{GGP, II}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in Teilaufgabe b) berechnet. Außerdem ist in diesem Fall λ_1 der schnellere Eigenwert, da $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ gilt. Also sind die Trajektorien am Anfang in Richtung von q_1 und in der Nähe vom GGP in Richtung von q_2 . Wegen der Instabilität laufen die Trajektorien aus dem GGP raus. Und außerdem müssen die Trajektorien verzerrt eingetragen werden, da die Zeichnung in u_C - i_L -Ebene, also im nichttransformierten Zustandsraum erfolgt.



k) Nun sind wir an den Schritt gelangt, den Grenzübergang $L \rightarrow 0$ durchzuführen, und einen idealen Relaxationsoszillator zu kriegen. In dieser Teilaufgabe soll die Trajektorie ~~die~~ mit dem Anfangswert ~~der~~ x_0 , der auf dem resultierenden Phasenportrait auf der letzten Seite der Angabe angedeutet wird, in dieses gegebene Phasenportrait eingezeichnet werden. Die Vorgehensweise ist ganz analog zu der Betrachtung des dynamischen Pfads, d.h. man soll die Pfeile im Phasenportrait folgen, also ~~die~~ die Trajektorie soll wie die Nachbartrajektorien laufen. Um x_0 zeigen die Pfeile nach oben, deshalb zeichnet man eine Gerade wie die Nachbartrajektorien vertikal zur u_C -Achse und deutet mit Pfeilen die Richtung nach oben an. Wenn die schräg nach unten verlaufende Trajektorie erreicht wird, folgt unsere Trajektorie auch diese, stimmt also mit dieser überein. Da die Pfeile nach links unten zeigen, geht unsere Trajektorie auch in diese Richtung. Dann wird diese Strecke beendet und dieser Punkt ähnelt sich einem Totpunkt. Hier stehen aber wieder senkrecht zur u_C -Achse ~~stehende~~ ~~laufende~~ Trajektorien zur Verfügung. Bis zur unteren schrägen Gerade wird diese gefolgt. Dann läuft unsere Trajektorie diesmal mit der unteren schrägen Gerade nach oben rechts bis wieder einem quasi-toten Punkt. Da helfen wieder die senkrechten

Geraden als Ausweg und unsere Trajektorie folgt wieder diese direkt nach oben, bis zur schrägen Gerade. Diese Schräge Gerade wird auch gefolgt usw. Damit ist die Trajektorie geschlossen. Diese oszilliert sich ständig auf dem trapezförmigen stabilen Grenzzyklus, was für Relaxationsoszillatoren charakteristisch ist. Die Zeichnung ist am Ende der Musterlösung als eine separate Seite eingefügt und aus der offiziellen GOP-Musterlösung entnommen.

1) Aus der Zeichnung ist es ersichtlich, dass ~~bei~~ bei den Totpunkten, die sich bei der vorliegenden Schaltung auf der Kennlinie ohne Berücksichtigung von der Induktivität ergeben würden, Sprünge ~~offen~~ stattfinden. Damit ist der Ausweg aus Totpunkten Sprungphänomene und ~~dieser~~ diese in Übung 3 postulierten Phänomene werden damit gerechtfertigt.

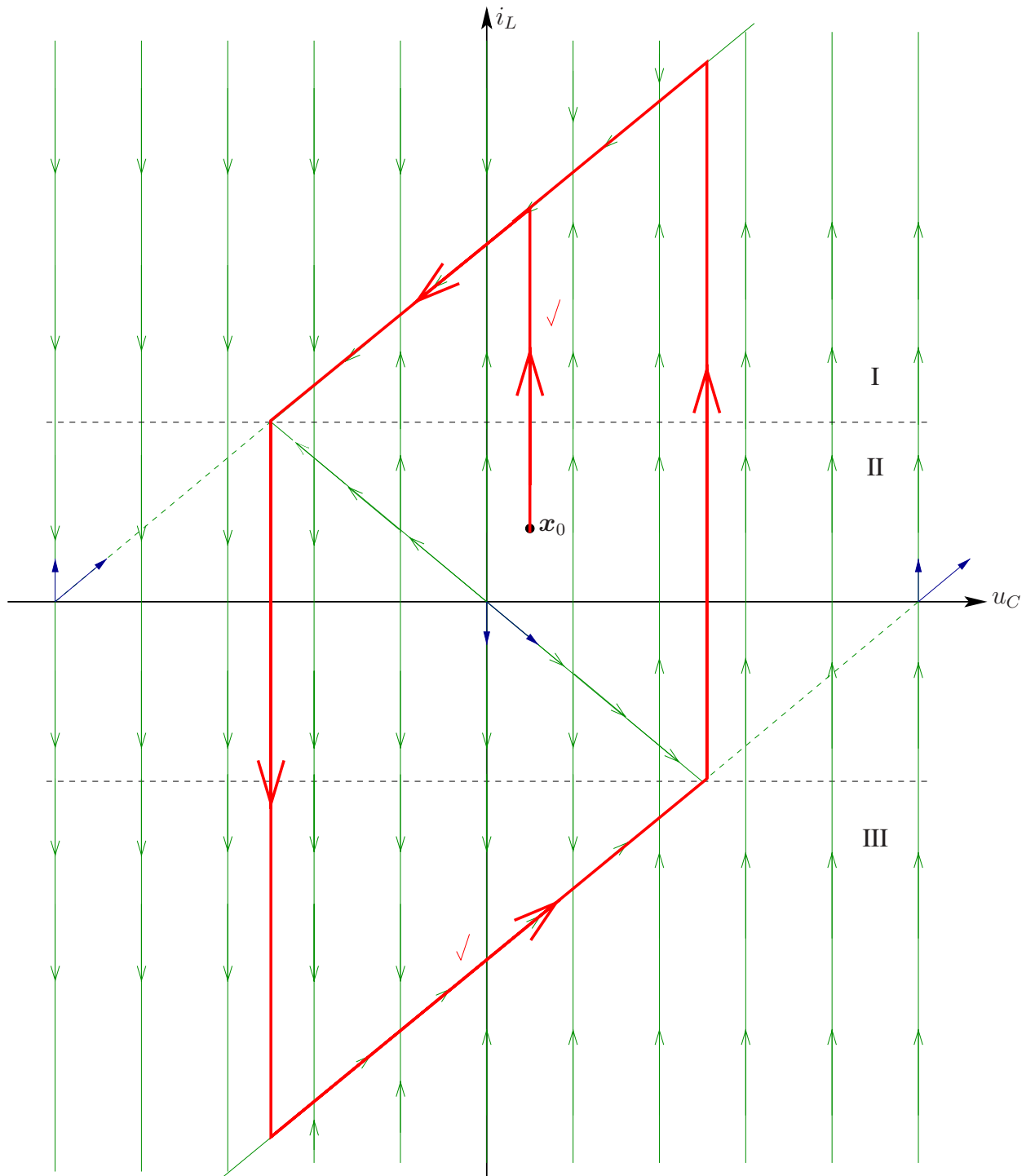


Bild 12: Resultierendes Phasenportrait