Kapitel 11 – Reaktive Netzwerkelemente

→ Schaltungstechnik 1: Nur <u>resistive</u> Elemente, d.h. $u(t)$ und $i(t)$ hängen nur von den Größen genau an diesem Zeitpunkt t ab. ⇒ resistive Bauelemente sind gedächtnislos, ohne dynamische Effekte.

→ Schaltungstechnik 2: Einführung <u>reaktiver</u> Bauelemente (Reaktanzen) ⇒ sind gedächtnisbehaftet, daher fähig um Energie zu speichern, also dynamisch.

<u>Reaktive Eintore:</u> → u und i stehen zum gleichen Zeitpunkt t nicht in einer festen Relation, d.h. Kenliniendarstellung in u-i-Ebene ist nicht möglich.

⇒ Einführung von <u>Ladung</u> (q) und <u>Fluss</u> (Φ):

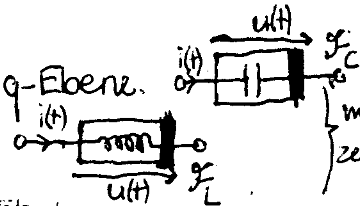
• $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$, • $\Phi(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$ $\xrightarrow[\text{erlaubt}]{\text{wenn } t_0 \to -\infty}$ und $q(-\infty)=0$, $\Phi(-\infty)=0$ ⇒ $\boxed{\bullet\ q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau}$ $\boxed{\bullet\ \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau}$

Einheiten: $[q] = [i]\cdot[t] = \underline{A \cdot s} = C$, $[\Phi] = [u]\cdot[t] = \underline{V \cdot s} = Wb$ (Weber)

→ Umgekehrt: $\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt},\ u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}}$

• Kennlinie eines kapazitiven Eintors (= nichtlinearen Kapazität) ist in u-q-Ebene.

• Kennlinie eines induktiven Eintors (= nichtlin. Induktivität) ist in i-Φ-Ebene.



} wenn zeitinvariant

→ implizite Beschreibung: $\mathcal{F}_C = \{(u,q) \mid f_C(u,q) = 0\}$, $\mathcal{F}_L = \{(i,\Phi) \mid f_L(i,\Phi) = 0\}$ für Kapazitäten, bzw. Indukt.

⇒ f_C und f_L sind konstituierende Funktionen, die <u>immer</u> existieren. (nicht eindeutig)

→ analog zu resistiven Eintoren existieren auch parametrische Beschreibungen. (existieren nicht immer, sind nicht eindeutig.)

→ explizite Beschreibung: existieren nicht immer, sind eindeutig.

• $q = c(u)$: spannungsgest. • $u = c^{-1}(q)$ ladungsgest. • $\Phi = \ell(i)$: stromgest. • $i = \ell^{-1}(\Phi)$: flussgest.

→ Algebraische Eintore sind Netzwerkelemente, für die mindestens eine der impliziten Beschreibungen $f_R(u,i)$, $f_C(u,q)$, $f_L(i,\Phi)$ und $f_M(\Phi,q)$ existiert. ⇒ $f_M(\Phi,q)$ ist implizite Besch. von <u>Memristor</u>, einem gedächtnisbehafteten Widerstand.

<u>Bsp:</u> Norator, Nullator sind resistiv, kapazitiv, induktiv und memristiv.

• Stromquelle ist resistiv und induktiv (nicht kapazitiv und memristiv, da q zeitvariant ist).

<u>Dualität:</u> → Resistiv: $u \to iR_d$, $i \to \frac{u}{R_d}$ ⇒ kapazitiv und induktiv: $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{t} \frac{u(\tau)}{R_d}d\tau = \frac{\Phi(t)}{R_d}$, $\Phi(t)$ analog.

⇒ Kapazität ist dual zu Induktivität und umgekehrt: $f_C(u,q) \to f_C\left(iR_d, \frac{\Phi}{R_d}\right) = f_L(i,\Phi)$, $f_L(i,\Phi) \to f_L\left(\frac{u}{R_d}, qR_d\right) = f_C(u,q)$

→ Dualwandlung geschieht mit einem Gyrator, deswegen alle Schaltungen mit nur Kapazitäten oder nur Induktivitäten möglich (wie R und G).

→ Bei Dualwandlung Kennlinie von einer in die andere Ebene übertragen und Achsen skalieren (siehe Skript und Übung)

<u>Eigenschaften:</u> Viele sind analog zu resistiven Eintoren.

1. Linearität: • Kapazitive Eintore sind streng linear, wenn: $(u,q) \in \mathcal{F}_C \Rightarrow (ku, kq) \in \mathcal{F}_C$, $\forall k \in \mathbb{R}$ und $\forall (u_1,q_1),(u_2,q_2) \in \mathcal{F}_C \Rightarrow (u_1+u_2, q_1+q_2) \in \mathcal{F}_C$

⇒ streng lineare reaktive Eintore haben als Kennlinie ein Unterraum der u-q bzw. i-Φ-Ebene (also linear und quellenfrei)

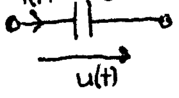
<u>Bsp:</u> Nullator, Norator, Ursprungsgeraden (Kondensator)
0-dim. 2-dim. 1-dim.

• Lineare Reaktive Eintore haben als Kennlinie einen affinen Unterraum der u-q bzw i-Φ-Ebene. Verschiebung vom Ursprung ist gleich zu Werten der Spannungs- bzw. Stromquellen. (linear und quellenbehaftet)

!!! Ein lineares reaktives Eintor ist äquivalent zu einem streng linearen mit geeigneten Anfangswerten. !!!

⇒ Anfangswerten können als Quellen aufgefasst werden.

<u>lineare Kapazität (C):</u>

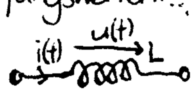


$q = C \cdot u \Rightarrow [C] = \frac{[q]}{[u]} = \frac{As}{V} = F$ (Farad)

Integralglg.: $u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau$ mit $u(t_0) = \frac{q(t_0)}{C}$

Differentialglg.: $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i = C \cdot \dot{u}}$ (wichtig: u muss <u>stetig</u> sein)

<u>lineare Induktivität (L):</u>



$\Phi = L \cdot i \Rightarrow [L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{Vs}{A} = H$ (Henry)

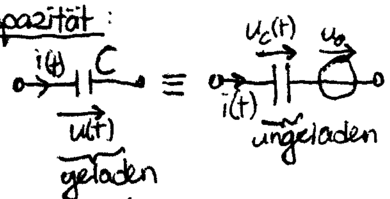
Integralglg.: $i(t) = i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{u(\tau)}{L}d\tau$ mit $i(t_0) = \frac{\Phi(t_0)}{L}$

Differglg.: $u = L \cdot \frac{di}{dt} \Leftrightarrow \boxed{u = L \cdot \dot{i}}$ (Wichtig: i muss <u>stetig</u> sein.)

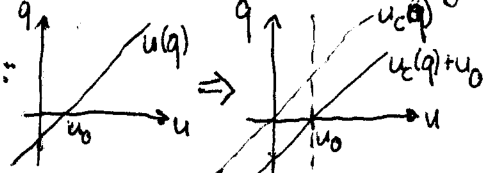
2. Gedächtnis: Reaktive Elemente haben Gedächtnis. Bspw. in $u(t_0)$ von Integralgleichung (siehe oben) wird die Geschichte vor diesem Zeitpunkt t_0 gespeichert.

3. ESB linearer Reaktanzen: Den Anfangswert einer Reaktanz kann man mit einer geeigneten Quelle modellieren:

Kapazität:



mit $u(t)=u_C(t)+u_0$:



→ Bei Induktivität analog, aber mit Stromquelle (siehe Skript)

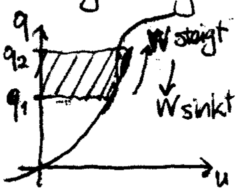
4. Stetigkeit !!! $u_C(t)$ von kapazitiven, linearen, zeitinvarianten Eintoren ist stetig, sonst $i_C \to \infty$, was praktisch nicht möglich ist.

$i_L(t)$ von induktiven, linearen, zeitinvar. Eintoren ist stetig, sonst $u_L \to \infty$

5. Verlustfreiheit: • resistiv: $p=u\cdot i=0 \Leftrightarrow$ Kennlinie nur auf den Achsen

• reaktiv: $p=u\cdot i=u\cdot\frac{dq}{dt}$, hängt von Änderung von q ab (ist in einem Punkt in u-q-Ebene gleich Null).

→ Energie ist gleich zur Fläche zwischen Kennlinie und q-Achse (bei Induktivität Φ-Achse).



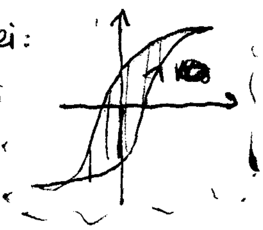
$$W_C=\int_{q_1}^{q_2}u(q)\,dq$$

→ Ein reaktives Eintor, das von mind. einer Größe gesteuert wird, kriegt keine Energiezufuhr in einer Periode, wenn (u,q) bzw. (i,Φ) periodisch durchgelaufen wird.

⇒ $W_C=0$ wenn Anfangspunkt und Endpunkt gleich sind und die Kurve keine geschlossene Schleifen hat.

⇒ Jede lineare, zeitinvariante Reaktanz hat diese Eigenschaft: Verlustfreiheit.

→ Hysteresekurven bspw. sind nicht verlustfrei:



6. Energiespeicherung:

Def: Kapazität: $W_C(t)=\int_{q_1}^{q_2}u(q)\frac{dq(t)}{dt}dt$

Induktivität: $W_L(t)=\int_{\Phi_1}^{\Phi_2}i(t)\cdot\frac{d\Phi(t)}{dt}dt$

$u>0$:

⇒ Wenn q steigt ($\Leftrightarrow q_2>q_1$): $W_C>0$ (Energieaufnahme)

Wenn q sinkt ($\Leftrightarrow q_2<q_1$): $W_C<0$ (Energieabgabe)

$u<0$:

Wenn q steigt ($\Leftrightarrow q_2>q_1$): $W_C<0$!

Wenn q sinkt ($\Leftrightarrow q_2<q_1$): $W_C>0$

$\boxed{\text{also } p=u\cdot i=u\cdot\frac{dq}{dt}>0 \text{ muss gelten für } W_C>0}$

$i>0$:

⇒ Wenn $\Phi_2>\Phi_1$: $W_L>0$

Wenn $\Phi_2<\Phi_1$: $W_L<0$

$i<0$:

⇒ Wenn $\Phi_2>\Phi_1$: $W_L<0$

Wenn $\Phi_2<\Phi_1$: $W_L>0$

$\boxed{\text{also } p=u\cdot\frac{d\Phi}{dt}>0 \text{ muss für } W_L>0 \text{ gelten}}$

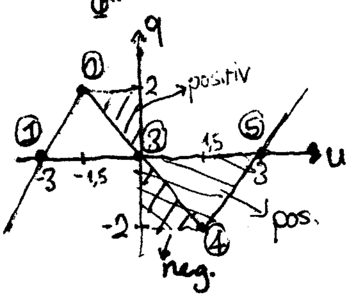
• Ruhepunkt (=Relaxationspunkt) hat die Eigenschaft, dass man ausgehend von diesem in irgendeinen anderen Betriebspunkt immer Energie aufnimmt. ($\forall(u,q)\in\mathcal{F}_C$ bzw. $\forall(i,\Phi)\in\mathcal{F}_L$: $W_C(P,\text{Relax.}P)\geq 0$ bzw. $W_L(P,\text{Relax.}P)\geq 0$)

⇒ $\forall q_1: \int_{q^*}^{q_1}u(q)\,dq\geq 0$ mit Relaxationspunkt q^* ⇒ RP ist ein Energieminimum!

oder $\forall\Phi_1: \int_{\Phi^*}^{\Phi_1}i(\Phi)\,d\Phi\geq 0$ mit RP Φ^*

Kandidaten für RP sind: • Schnittpunkte mit Achsen
• Knickpunkte, Extrema

Bsp:



→ Kand.: 1, geht man ein bisschen rechts ⇒ $u<0$, $\frac{dq}{dt}>0$ ⇒ $W_C<0$ (kein RP)

2: $W_C(2,-\infty)>0$, da $u<0$, $\dot q<0$.

$W_C(2,3)>0$, da $u<0$, $\dot q<0$, $W_C(3,4)<0$, $u>0$, $\dot q<0$, aber $W_C(2,4)=0$ da die Flächengleichheit gilt. $W_C(4,\infty)>0$, da $u>0$, $\dot q>0$.

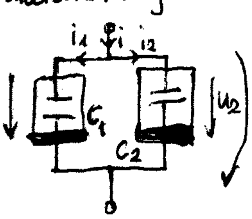
⇒ $W_C\geq 0$ gilt überall. ⇒ 2 ist RP.

→ Analog 3, 5 sind keine RP und 4 ist RP. ⇒ Ursprung muss kein Ruhepunkt sein.

→ Für streng lineare Reaktanzen ist aber Ursprung immer der einzige RP.

Zusammenschaltung:

• Parallelschaltung von Kapazitäten:



$u=u_1=u_2$

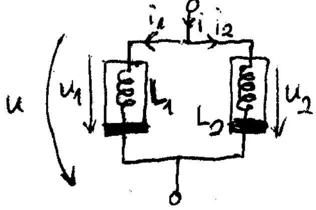
$i=i_1+i_2$, $q=q_1+q_2$

Wenn C_1 und C_2 spannungsgst.

⇒ $q=c_1(u)+c_2(u)$

→ streng linear: $\boxed{C_{ges}=C_1+C_2}$

• Parallelschaltung von Induktivitäten:



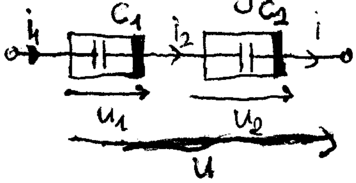
$u=u_1=u_2$, $\Phi=\Phi_1=\Phi_2$

$i=i_1+i_2$

⇒ streng linear:

⇒ $\boxed{L_{ges}=\frac{L_1\cdot L_2}{L_1+L_2}=L_1\|L_2}$

• Serienschaltung von Kapazitäten:

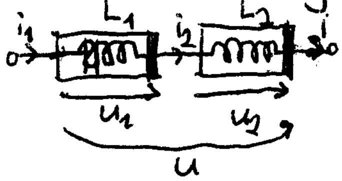


$i = i_1 = i_2$

$u = u_1 + u_2$

streng lin: $\boxed{C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = C_1 \| C_2}$

• Serienschaltung von Induktivitäten:



$i = i_1 = i_2$

$u = u_1 + u_2$

streng lin.: $\boxed{L_{ges} = L_1 + L_2}$

Herl.: $i_1 = C_1 \cdot \dot{u}_1 = C_2 \dot{u}_2 = i_2 = i \Rightarrow \dot{u}_1 = \frac{C_2}{C_1} \cdot \dot{u}_2$, $\dot{u} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 = \dot{u}_2 \left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right)$

$\Rightarrow \dot{u} = \dot{u}_2 \frac{C_1 + C_2}{C_1}$, $\dot{u}_2 = \frac{i}{C_2}$ $\Rightarrow \dot{u} = i \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \Rightarrow i = C_{ges} \cdot \dot{u}$

mit $C_{ges} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Herl.: $u = L_{ges} \dot{i} = u_1 + u_2 = L_1 \cdot \dot{i}_1 + L_2 \dot{i}_2 = \dot{i}(L_1 + L_2)$

$\Rightarrow L_{ges} = L_1 + L_2$

→ Parallelschaltung: Addition der Kennlinien in u-q-Ebene, bzw. in $\underbrace{\text{!}\Phi\text{-}i\text{-Ebene!}}_{\text{Vorsicht}}$ → vom Anfangswert anfangen (siehe Skript)

→ Reihenschaltung: Addition der Kennlinien in !q-u-Ebene!, bzw. in i-Φ-Ebene

→ Kapazitäten sind analog zu Leitwerte, Induktivitäten sind analog zu Widerstände.

→ Formeln für streng lineare Reaktanzen können für lineare verwendet werden, indem Anfangswerte als Quellen betrachtet werden.

Kapazitive und Induktive Mehrtore:

→ Wie bei resistiven, diesmal Erweiterung der reaktiven Eintore:

→ Betriebsgrößen sind in Vektoren: $\underline{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$ bzw. $\underline{i} = [i_1, \dots, i_p]^T$

$\underline{q} = [q_1, \dots, q_p]^T$ bzw. $\underline{\Phi} = [\Phi_1, \dots, \Phi_2]^T$

→ Wieder 3 Beschreibungen: implizit, parametrisch, explizit.

→ Wenn für ein resistives Mehrtor die implizite Beschreibung $f_R(\underline{u}, \underline{i}) = 0$ sich als $f_1(\underline{u}) = 0, f_2(\underline{i}) = 0$ schreiben lässt, und eine von den streng linear ist $\Rightarrow f_1(\underline{u}) = \underset{\sim}{M} \cdot \underline{u} = 0$ oder $f_2(\underline{i}) = \underset{\sim}{N} \cdot \underline{i} = \underline{0}$ (Kernbeschreibung)

Dann durch Integration: $f_1(\underline{\Phi}) = \underset{\sim}{M} \cdot \underline{\Phi} = \underline{0}$ oder $f_2(\underline{q}) = \underset{\sim}{N} \cdot \underline{q} = \underline{0}$.

⇒ Dann kann dieses resistive Mehrtor als bspw. induktiv aufgefasst werden: $\underline{f}_L(\underline{i}, \underline{\Phi}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{\Phi}) \\ f_2(\underline{i}) \end{bmatrix} = \underline{0}$.

Für Beispiele Übertrager und NIK siehe bitte Skriptum.