Kapitel 16 - Komplexe Wechselstromrechnung

- In der Praxis werden Schaltungen im stationären ($\hat{=}$ eingeschwungenen) Betrieb mit Wechselstrom eingespeist. Solche sich dauernd wechselnde Erregungen sind nahezu immer ähnlich einer Sinusfunktion. Deswegen ist die Betrachtung der Schaltungen mit sinusförmiger Erregung wichtig.
- Stationärer Betrieb ist der Zustand, der sich nach genug langer Zeit nach dem Einschalten der Erregung einstellt.
- In dieser Kapitel werden Analyseverfahren für <u>lineare, zeitinvariante Schaltungen im stationären Betrieb mit sinusoidaler Erregung</u> diskutiert.
- Für einfachere Berechnungen sind komplexe Zeigern geeignet. Der Zusammenhang über Eulersche Formel verknüpft Sinusfunktionen mit komplexen Größen.

• <u>Sinusförmige Erregung und eingeschwungener Zustand</u>

→ Eine sinusförmige Größe hat allgemein die Form $\boxed{A_m\cos(\omega t+\alpha)}$. Es kann genauso als $A_m\sin(\omega t+\beta)$ dargestellt werden. Aber nach Konvention wird in ST2 immer mit cos-Funktionen, die auch sinusförmig sind (nur um $\frac{\pi}{2}$ verschoben), gearbeitet.

→ <u>Satz</u> (Herleitung im Skript): Die Antwort einer linearen, zeitinvarianten, dynamischen Schaltung im stationären Zustand auf eine sinusförmige Erregung ist ebenfalls sinusförmig mit gleicher Kreisfrequenz ω.

- Dieser Satz kann mittels Überlagerungssatzes auf beliebig viele sinusförmige Erregungen mit beliebigen ω angewendet werden. Die Antwort besteht dann aus genauso vielen sinusförmigen Größen mit den entsprechenden ω.

• <u>Komplexe Zeigergrößen</u>

→ Ein dem sinusförmigen Signal $A_m\cos(\omega t+\alpha)$ zugehöriger Zeiger hat die Form $\boxed{A=A_m\exp(j\alpha)}$, wobei $A_m=\sqrt{A\cdot A^*}$ der Betrag und α die Phase des komplexen Zeigers sind. Diese Zuordnung des Zeigers zu dem reellen Signal ist <u>eineindeutig</u>.

→ Der Zeiger $A=A_m\exp(j\alpha)$ ist ein ruhender Zeiger, also ändert sich nicht mit der Zeit. Erzeugt man einen rotierenden Zeiger $A\cdot\exp(j\omega t)=A_m\exp(j\alpha)\cdot\exp(j\omega t)$, der sich mit konstanter Länge dreht, kann man das ursprüngliche Signal rückgewinnen, indem man den Realteil des rotierenden Zeigers bildet:

$$\left[\mathrm{Re}\{\overbrace{A\exp(j\omega t)}^{\text{rot. Zeiger}}\}=\mathrm{Re}\{A_m\exp(j\alpha)\exp(j\omega t)\}=\mathrm{Re}\{A_m\exp(j(\omega t+\alpha))\}\overset{\text{Euler-Formel}}{=}\mathrm{Re}\{A_m\cos(\omega t+\alpha)+A_m j\sin(\omega t+\alpha)\}\right.$$
$$\left.=A_m\cos(\omega t+\alpha)\right]$$

- Euler-Formel: $e^{jx}=\cos x+j\sin x$, $e^{-jx}=\overbrace{\cos(-x)}^{\text{gerade Fkt.}}+j\overbrace{\sin(-x)}^{\text{unger. Fkt.}}=\cos x-j\sin x$.

→ <u>3 Hilfssätze</u> (Beweis im Skript):

1) Eineindeutigkeit: Zwei sinusförmige Signale sind genau dann gleich, wenn die zugehörigen Zeiger gleich sind. $\boxed{\forall t:\ a(t)=b(t) \iff A=B}$

2) Linearität: Zeiger einer Linearkombination sinusförmiger Signale entspricht der gleichen Linearkombination der den Signalen zugehörigen Zeiger. $\boxed{c_1a_1(t)+c_2a_2(t)+\dots+c_na_n(t)=b(t) \iff c_1A_1+c_2A_2+\dots+c_nA_n=B}$

3) Differentiation: Zeiger eines sinusförmigen Signals ist genau dann A, wenn $j\omega A$ der Zeiger von der ersten zeitlichen Ableitung des Signals ist. $\boxed{b(t)=\frac{d}{dt}a(t) \iff B=j\omega A}$

→ Der Ableitungsoperator kann für Zeiger immer mit $j\omega$ ersetzt werden. $\boxed{\frac{d}{dt} \hat{=} j\omega}$
Dementsprechend $\frac{d^2}{dt^2} \hat{=} (j\omega)^2$, usw.

→ Man darf Schaltungen mit Zeigergrößen analysieren, wobei KCL&KVL für Zeigergrößen angewendet werden können.

→ Berechnung des Betrags und der Phase eines Zeigers A erfolgen über die folgenden Formeln.

$$A_m = \sqrt{A A^*}\ ,\quad \alpha = \arctan\left(\frac{Im\{A\}}{Re\{A\}}\right) \text{ für } Re\{A\} \geq 0\ ,\quad \alpha = \arctan\left(\frac{Im\{A\}}{Re\{A\}}\right) + \pi \text{ für } Re\{A\} < 0$$

- Die Kennlinie eines Memristors entspricht ~~der~~ eines Resistors, da $\Phi = K \cdot q$ mit $u = \frac{d\Phi}{dt}$, $i = \frac{dq}{dt}$ für die Ableitung der Kennlinie des Memristors $u = K \cdot i$ gilt. D.h es gibt keinen Unterschied zwischen einem Memristor und einem Resistor bei der komplexen Wechselstromrechnung.

• Netzwerkanalyse im Frequenzbereich (mit Zeigergrößen)

- Kirchhoff-Gesetze in Zeigerdarstellung

→ KCL&KVL sind analog ~~wie~~ bei reellen Größen für komplexe Zeigergrößen zu verwenden.

$\boxed{\text{KCL: } \sum_{\text{Knoten}} I_k = 0}$, $\boxed{\text{KVL: } \sum_{\text{Masche}} U_k = 0}$,

A: Knoteninzidenzmatrix
B: Schleifeninzidenzmatrix
u_k, i_k: Knotenspg. & Knotenstr.
u, i: Zweigspg. & Zweigstr.

$\underset{\sim}{A} \cdot \underline{i} = \underline{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \cdot \underline{I} = \underline{0}$
$\underset{\sim}{A}^T \underline{u}_k = \underline{u} \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^T \underline{U}_k = \underline{U}$
$\underset{\sim}{B} \cdot \underline{u} = \underline{0} \Leftrightarrow \underset{\sim}{B} \cdot \underline{U} = \underline{0}$
$\underset{\sim}{B}^T \underline{i}_s = \underline{i} \Leftrightarrow \underset{\sim}{B}^T \underline{I}_s = \underline{I}$

- Netzwerkelementebeschreibung in Zeigerdarstellung

→ Bei ST1 wurde für resistive Schaltungen die Kernbeschreibung (implizit) eingeführt: $\underset{\sim}{M} \cdot \underline{u} + \underset{\sim}{N} \cdot \underline{i} = \underline{0}$. Bei reaktiven Schaltungen kommen evtl. auch die Ableitungen der Größen vor. Dafür führt man folgende Erweiterung ein: $\left(\underset{\sim}{M}_1 \frac{d}{dt} + \underset{\sim}{M}_0\right)\underline{u} + \left(\underset{\sim}{N}_1 \frac{d}{dt} + \underset{\sim}{N}_0\right)\underline{i} = \underline{e}$.

→ In Zeigerdarstellung sieht die modifizierte Kernbeschreibung wie $(\underset{\sim}{M}_1 j\omega + \underset{\sim}{M}_0)\underline{U} + (\underset{\sim}{N}_1 j\omega + \underset{\sim}{N}_0)\underline{I} = \underline{E}$ aus.

→ Wenn eine Knotenleitwertsbeschreibung existiert, dann gilt $\underset{\sim}{N}_1 = 0$, $\underset{\sim}{N}_0 = \underbrace{-\mathbb{1}}_{\text{Einheitsmatrix}}$, $\underset{\sim}{M}_1 = \underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{M}_0 = \underset{\sim}{G}$.

$$\Rightarrow \underbrace{(j\omega \underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{G})}_{\underset{\sim}{Y}}\underline{U} - \underline{I} = \underline{E} \Leftrightarrow \underset{\sim}{Y}\cdot\underline{U} - \underline{I} = \underline{E} \underset{\text{mit } A \text{ multip.}}{\overset{\underline{U} = A^T \underline{U}_k \text{ (KVL)}}{\Leftrightarrow}} \underbrace{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{Y}\underset{\sim}{A}^T}_{\underset{\sim}{Y}_k}\underline{U}_k - \underbrace{\underset{\sim}{A}\underline{I}}_{=0 \text{ (KCL)}} = \underbrace{\underset{\sim}{A}\underline{E}}_{=\underline{I}_q} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{Y}_k \cdot \underline{U}_k = \underline{I}_q}$$

Knotenspannungsanalyse!!!

→ Die obige Herleitung zeigt, wie man im Falle reaktiver Schaltungen mit sinusförmiger Erregung die Knotenspannungsanalyse durchführen kann. Die Knotenleitwertsmatrix $\underset{\sim}{Y}_k = j\omega \underset{\sim}{C}_k + \underset{\sim}{G}_k$ hat diesmal auch komplexe Einträge. Diese komplexen Einträge berücksichtigen die vorhandenen Reaktanzen.

- Kapazität C: $i_C = C \frac{du_C}{dt} \Leftrightarrow I_C = \underbrace{j\omega C}_{\text{kompl. Leitwert}} U_C$, Induktivität L: $u_L = L \frac{di_L}{dt} \Leftrightarrow U_L = j\omega L I_L$
$\Rightarrow I_L = \underbrace{\frac{1}{j\omega L}}_{\text{kompl. Leitwert}} U_L$

• Netzwerkfunktionen:

→ Eine Netzwerkfunktion ist immer der Quotient zweier Zeiger.

→ Gehören die beiden Zeiger zum gleichen Tor, so spricht man von Zweipolfunktionen.
Gehören die beiden Zeiger zu unterschiedlichen Klemmenpaaren, so liegt eine Übertragungs(Transfer)funktion vor.

- Zweipolfunktionen:
  - Impedanz (≙ komplexer Widerstand, Scheinwiderstand): $Z(j\omega) = \frac{U}{I}$ mit U, I die zu $u(t), i(t)$ zugehörigen Zeiger.

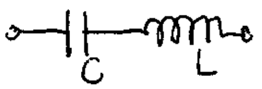
Bsp: Kapazität C: $Z = \frac{1}{j\omega C}$; Induktivität L: $Z = j\omega L$; ohmscher Widerstand R: $Z = R$

  - Admittanz (≙ komplexe Leitwert, Scheinleitwert): $Y(j\omega) = \frac{I}{U}$

Bsp: Kapazität C: $Y = j\omega C$; Induktivität L: $Y = \frac{1}{j\omega L}$; ohmscher Widerstand R: $Y = \frac{1}{R}$

→Für die Verschaltung der Immittanzen (≙ Impedanzen & Admittanzen) kann man die Impedanzen als Widerstände und Admittanzen als Leitwerte betrachten und Bauteile zusammenfassen.

Bsp: Reihenschaltung einer Kapazität mit einer Induktivität



$$\Rightarrow Z_1 = \frac{1}{j\omega C},\ Z_2 = j\omega L \underset{\text{Reihen-sch.}}{\Longrightarrow} Z_{ges} = Z_1 + Z_2 = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

$$Y_1 = j\omega C,\ Y_2 = \frac{1}{j\omega L} \Longrightarrow Y_{ges} = Y_1 \| Y_2 = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{j\omega C \cdot \frac{1}{j\omega L}}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{\frac{C}{L}}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

-Transferfunktionen:

→Bei der Knotenspannungsanalyse mit der Vorschrift $\underset{\sim}{Y}_k(j\omega) \cdot \underline{U}_k = \underline{I}_q$ ist das Ziel, die Knotenspannungen u_k, bzw. die Zeiger davon, also U_k mit bekannter $\underset{\sim}{Y}_k$ und $\underline{I}_q$ zu bestimmen.

→Wenn $\underset{\sim}{Y}_k$ invertierbar ist, dann darf man schreiben $\boxed{\underline{U}_k = \underset{\sim}{Y}_k^{-1} \cdot \underline{I}_q}$

→Um die Knotenleitwertsmatrix zu bestimmen, kann man auf die Kenntnisse aus ST1 zurückgreifen (Die entsprechende ST1-Zusammenfassung wird hochgeladen werden). Die in ST1 nicht vorkommenden Reaktanzen kann man ganz einfach in $\underset{\sim}{Y}_k$ eintragen, indem man die Admittanzen der Reaktanzen einträgt. Also werden die Reaktanzen wie eine Leitwert eingetragen, aber mit $G = j\omega C$ (Kap.) bzw. $G = \frac{1}{j\omega L}$ (Ind.).

→Um einen Knotenspannungszeiger in Abhängigkeit von einem Erregungszeiger zu bestimmen, eignet sich die folgende Regel:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{U_{k_m}}{I_n} = \frac{(-1)^{n+m} \det \underset{\sim}{Y}_{nm}(j\omega)}{\det \underset{\sim}{Y}_k(j\omega)}}$$

→$\underset{\sim}{Y}_{nm}$ ist die Matrix, die sich ergibt, wenn die n-te Zeile und m-te Spalte von $\underset{\sim}{Y}_k$ gestrichen werden.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y}_k = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{Y}_{13} = \begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix},\ \underset{\sim}{Y}_{23} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix} \text{ usw.}$$

→Eigenwerte von $\underset{\sim}{A}$ = Eigenfrequenzen des Systems = Polstellen von $H(j\omega)$ = Nullstellen des Nennerpolynoms von $H(j\omega)$.

→Eine andere Methode um eine Übertragungsfunktion zu bestimmen ist die Cramer'sche Regel:

Cramer'sche Regel: $\boxed{U_{k,m} = \frac{\det(\underset{\sim}{Y}_{k,m})}{\det(\underset{\sim}{Y}_k)}}$

→Dabei ist $U_{k,m}$ ein Knotenspannungszeiger und $\underset{\sim}{Y}_{k,m}$ entspricht der Matrix $\underset{\sim}{Y}_k$, bei der die zu $U_{k,m}$ gehörige, also m-te Spalte durch den Quellstromvektor ersetzt wird.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y}_k \underline{U}_k = \underline{I}_q \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{k,1} \\ U_{k,2} \\ U_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q,1} \\ I_{q,2} \\ I_{q,3} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{Y}_{k,2} = \begin{bmatrix} y_{11} & I_{q,1} & y_{13} \\ y_{21} & I_{q,2} & y_{23} \\ y_{31} & I_{q,3} & y_{33} \end{bmatrix}$$

→Eine Übertragungsfunktion bspw. $H(j\omega) = \frac{U_{k,m}}{U_a}$ kann dann mittels Cramer'scher Regel wie folgt berechnet werden:

$$H(j\omega) = \frac{\det \underset{\sim}{Y}_{k,m}}{\det \underset{\sim}{Y}_k} \cdot \frac{1}{U_a}$$