Kapitel 16 - Komplexe Wechselstromrechnung, Bodediagramme

• Frequenzgang:

→ Die Netzwerkfunktionen (Zweipolfkt. & Transferfkt.) sind Funktionen der Kreisfrequenz ω.

→ Diese Frequenzabhängigkeit von Betrag & Winkel, bzw. Real & Imaginärteil wird Frequenzgang genannt.

• Frequenzgang von Betrag & Phase: „Bode-Diagramm"

→ Bodediagramm ist ein wichtiges Werkzeug um viele Eigenschaften eines Systems darzustellen. Deshalb gibt es auch viele Anwendungsbereiche für Bodediagramme, z.B. bei der Regelung von technischen Systemen Aussagen über Systemstabilität zu treffen, usw. (siehe RS1, im vierten Semester).

→ Bodediagramme stellen den Betrag und die Phase einer Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ doppelt logarithmisch dar, also wird $\log(H(j\omega))$ über einer logarithmischen Frequenzachse ($\omega = 0{,}1; 1; 10; \ldots$) dargestellt.

→ Man zerlegt die Übertragungsfunktion in Betrag und Phase, bzw. $v(\omega)$ und $\varphi(\omega)$:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\angle H(j\omega)} = \exp(g(j\omega)) = \exp(v(\omega)) \cdot \exp(j\varphi(\omega)) \quad \text{mit } g(j\omega) = \ln(H(j\omega))$$

$\Rightarrow$ $|H(j\omega)|$: Betrag, $\angle H(j\omega)$: Phase, $g(j\omega)$: Übertragungsmaß

$Re(g(j\omega)) = v(\omega) = \ln|H(\omega)|$: Übertragungsverhältnis, $Im(g(j\omega)) = \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$: Phase

→ Betrag und Phase werden folgendermaßen aus der Übertragungsfunktion berechnet:

$$\boxed{|H(j\omega)| = \sqrt{Re(H(j\omega))^2 + Im(H(j\omega))^2}}\,, \quad \boxed{\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))} & \text{für } Re(H(j\omega)) \geq 0 \\ \arctan \frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))} + \pi & \text{für } Re(H(j\omega)) < 0 \end{cases}}$$

→ Es ist üblich $H(j\omega)$ vor dem Logarithmieren zu normieren, mit $H(j\omega_0)$:

$$\ln \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} = v(\omega) - v(\omega_0) + j(\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0))$$

$H(j\omega_0)$ wird allgemein in der Fragestellung gegeben und hat meistens das Ziel, vor dem Logarithmieren eine einheitslose Größe zu schaffen.

→ Wird wie oben „logarithmus naturalis: $\ln\left(\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right)$ verwendet, so wird die berechnete Größe zwecks Kennzeichnung mit der Einheit Np ($\hat{=}$ Neper) versehen.

→ Sowohl in der Praxis als auch bei Schaltungstechnik 2 wird ln fast nicht mehr benutzt. Stattdessen wird das Übertragungsverhältnis mit $\log_{10}$ berechnet und mit der Einheit dB ($\hat{=}$ Dezibel) versehen.

$$\boxed{v(\omega) = 20 \log \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right| \text{dB}}$$

→ Folgende Rechenregeln der Logarithmusrechnung sind hilfreich beim Zeichnen der Bodediagramme:

(1): $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

(2): $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a \cdot b^{-1}) = \log(a) + \log(b^{-1}) = \log(a) - \log(b)$

(3): $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$

, weitere hilfreiche Darstellungen: • $\frac{1}{x} = x^{-1}$, • $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

• $-1 = e^{j\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + j\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$

→ Ist eine Übertragungsfunktion in Linearfaktoren mit reellen konstanten Koeffizienten wie folgt zerlegbar, so können das Übertragungsverhältnis und die Phase der gesamten Übertragungsfunktion mittels Superposition von $v_i(\omega)$ und $\varphi_i(\omega)$ einzelner Multiplikanden berechnet werden.

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{j\omega}{\beta_i}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{j\omega}{\alpha_k}\right)} \Rightarrow v(\omega)=\sum_{i=1}^{n}20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{\beta_i}\right|-\sum_{k=1}^{m}20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{\alpha_k}\right| \text{, falls } |H_0(j\omega_0)|=1$$

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\arctan\left(\frac{\omega}{\beta_i}\right)-\sum_{k=1}^{m}\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha_k}\right)$$

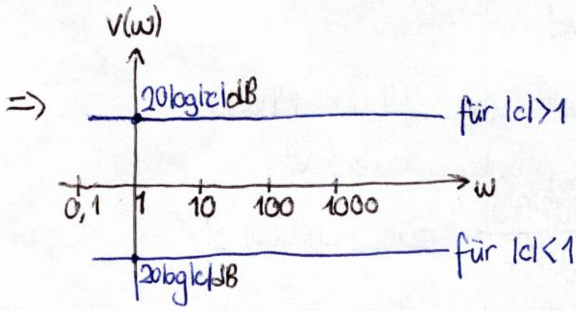
→ Unten werden einige Bodediagramme für simple Übertragungsfunktionen dargestellt. Diese sind wichtig, da fast alle Übertragungsfunktionen sich bis auf diese faktorisieren lassen und dann wie oben mithilfe dieser simplen Diagramme dargestellt werden können.

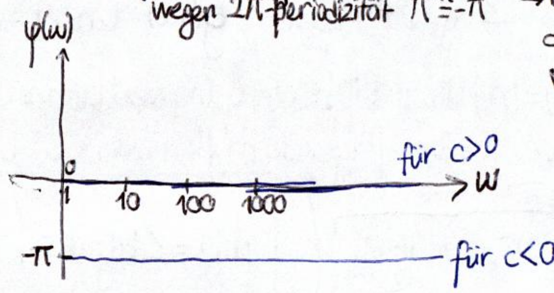
- $H(j\omega)=c=\text{const.} \Rightarrow v(\omega)=20\cdot\log|c|=\text{const.}$

$Re(H)=c,\ Im(H)=0 \Rightarrow \varphi(\omega)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{0}{c}\right) & \text{für } c>0\\ \arctan\left(\frac{0}{c}\right)+\pi & \text{für } c<0\end{cases} = \begin{cases}0 & \text{für } c>0\\ -\pi & \text{für } c<0\end{cases}$

wegen 2π-Periodizität $\pi \hat{=} -\pi$ → Es wird für die Phase der Bereich $[-\pi,\pi)$ verwendet.

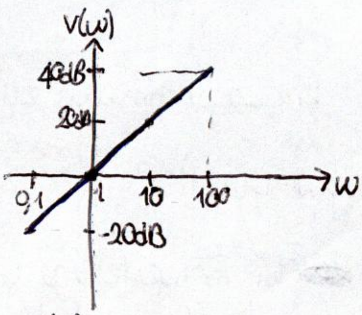
$\Rightarrow$

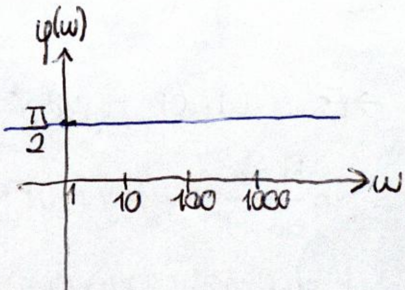




- $H(j\omega)=j\omega \Rightarrow v(\omega)=20\log\omega$

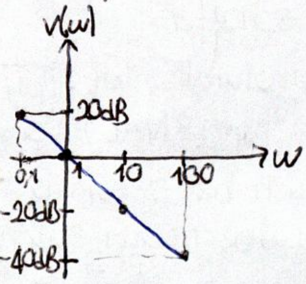
$Re(H)=0,\ Im(H)=\omega \Rightarrow \varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{\omega}{0}\right)=\arctan(\infty)=\frac{\pi}{2}$

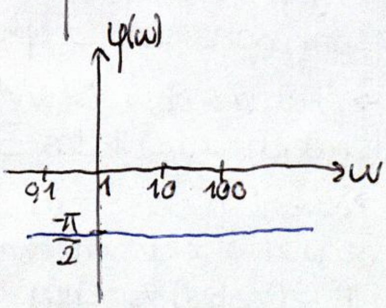




- $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{-j}{\omega} \Rightarrow v(\omega)=20\log\frac{1}{\omega}=-20\log\omega$

$Re(H)=0,\ Im(H)=\frac{-1}{\omega} \Rightarrow \varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{-\frac{1}{\omega}}{0}\right)=\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

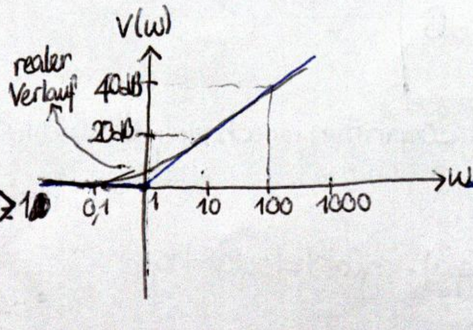


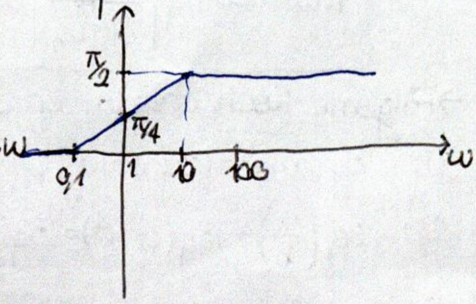


- $H(j\omega)=1+j\omega \Rightarrow v(\omega)=20\log\sqrt{1+\omega^2}$

$Re(H)=1,\ Im(H)=\omega \Rightarrow \varphi(\omega)=\arctan(\omega)$

$v(\omega)=10\log(1+\omega^2)\approx\begin{cases}10\cdot\log(1)=0 & \text{für } \omega\leq 1\\ 10\cdot\log(\omega^2)=20\log\omega & \text{für } \omega\geq 1\end{cases}$

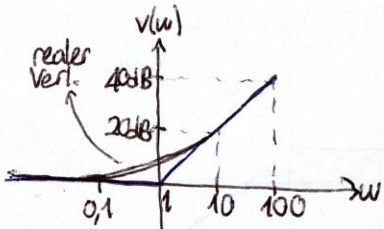


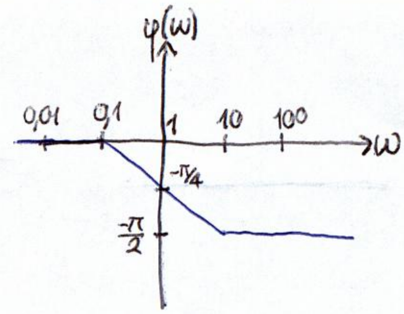


$\varphi(\omega)\approx\begin{cases}0 & \text{für } \omega<0{,}1\\ \frac{\pi}{4}[\log\omega+1] & \text{für } 0{,}1<\omega<10\\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \omega>10\end{cases}$

- $H(jw) = 1 - jw \Rightarrow V(w) = 20\log\sqrt{1+w^2} = 10\log(1+w^2)$

$Re(H) = 1, Im(H) = -w \Rightarrow \varphi(w) = \arctan(-w) = -\arctan(w)$





$$V(w) \approx \begin{cases} 10\log(1) = 0 & \text{für } w < 1 \\ 10\log(w^2) = 20\log(w) & \text{für } w \geq 1 \end{cases}$$

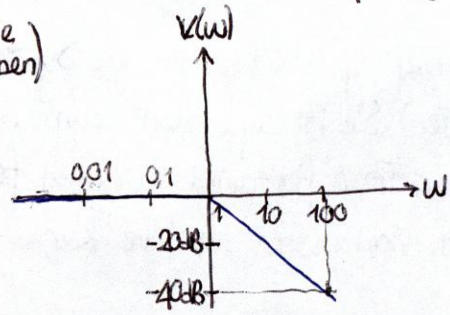
$$\varphi(w) \approx \begin{cases} 0 & \text{für } w < 0{,}1 \\ \frac{-\pi}{4}(\log w + 1) & \text{für } 0{,}1 < w < 10 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{für } w > 10 \end{cases}$$

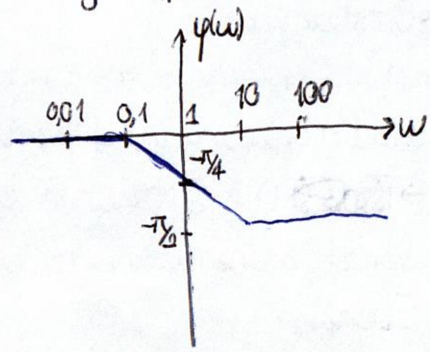
- $H(jw) = \frac{1}{1+jw} = \frac{1-jw}{1+w^2} \Rightarrow V(w) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1+w^2}$

$Re(H) = \frac{1}{1+w^2}, Im(H) = \frac{-w}{1+w^2}$

$$= 0 - 10\log(1+w^2) = -10\log(1+w^2) \approx \begin{cases} -10\log(1) = 0 & \text{für } w < 1 \\ -10\log(w^2) = -20\log(w) & \text{für } w \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(w) = \arctan\left(\frac{\frac{-w}{1+w^2}}{\frac{1}{1+w^2}}\right) = -\arctan(w)$ (wie oben)

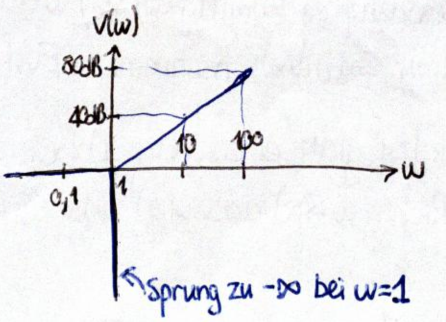


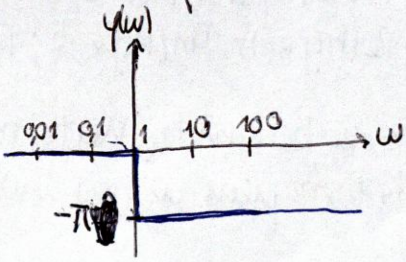


- $H(jw) = 1 + (jw)^2 = 1 - w^2 \Rightarrow V(w) = 20\log|1-w^2| = \begin{cases} 20\log(1) = 0 & \text{für } w < 1 \\ 20\log(0) = -\infty & \text{für } w = 1 \\ 20\log|-w^2| = 40\log(w) & \text{für } w > 1 \end{cases}$

$Re(H) = 1 - w^2, Im(H) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(w) = \arctan\left(\frac{0}{1-w^2}\right) = \begin{cases} \arctan(0) = 0 & \text{für } w < 1 \\ \arctan(-0) = -\pi & \text{für } w > 1 \end{cases}$$

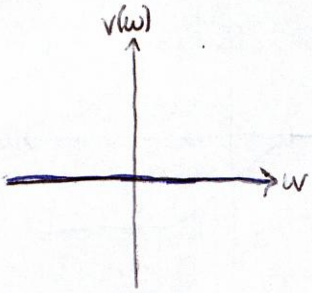




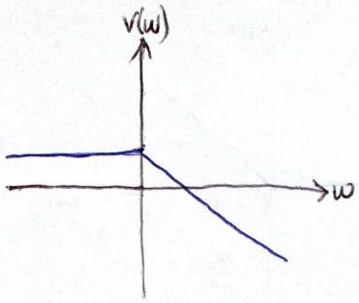
→ Wenn man also $H(jw) = (1-jw) \cdot \frac{1}{1+jw}$ als Übertragungsfunktion hat, soll man lediglich die Bodediagramme $H_1(jw) = 1 - jw$ und $H_2(jw) = \frac{1}{1+jw}$ jeweils für V und φ aufaddieren, um auf das Bodediagramm von $H(jw)$ zu kommen. Für Beispiele siehe Skriptum.

→ Für Übertragungsfunktionen von der Form $H(jw) = \frac{k_1 \cdot jw}{k_2((jw)^2 + jw \cdot \frac{w_0}{Q} + (w_0)^2)}$ also mit quadratischem Nennerpolynom, werden die Resonanzfrequenz w_0 und Gütefaktor Q definiert, die durch geeignete Umformung des Nenners zu gewinnen sind.

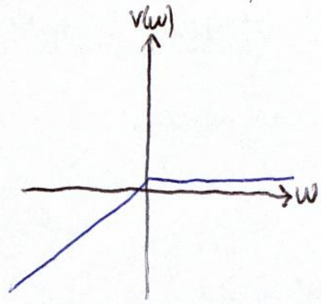
→ Nachdem man durch Superposition die Bodediagramme einer Übertragungsfunktion zeichnet, soll man auch den Typ dieser von den folgenden Auswahl nach Ähnlichkeit bestimmen können:



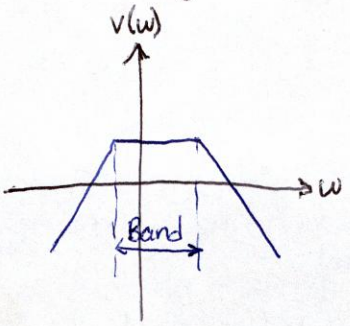
Allpass → alle Frequenzen durchgelassen.



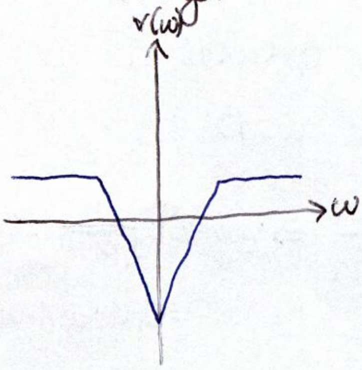
Tiefpass → tiefe Frequenzen durchgelassen



Hochpass → hohe Freq. durchgel.



Bandpass → ein Band von Frequenzen wird durchgelassen.



Bandsperre → ein Band von Freq. wird gesperrt.

• Ortskurven:

→ Die Ortskurven sind auch wichtige Werkzeuge um **Systemeigenschaften** darzustellen (siehe auch RS1-Vorlesung im 4. Semester). Sie ist äquivalent zum Bode-Diagramm.

→ Die Ortskurve einer Transferfunktion $H(j\omega)$ fasst alle Punkte $(Re\{H\}, Im\{H\})^T$ für verschiedene ω-Werte um. Man plottet also die Kurve $\begin{pmatrix} Re(H(j\omega)) \\ Im(H(j\omega)) \end{pmatrix}$ für alle $\omega \in [0, +\infty)$. in komplexer Ebene.

→ Vorgehensweise um die Ortskurve von $H(j\omega)$ zu zeichnen:

1. $H(j\omega)$ in Real- und Imaginär-Teil zerlegen. Dabei aufpassen, dass im Nenner kein komplexer Ausdruck vorkommt. Gegebenenfalls $H(j\omega)$ mit dem Komplex-konjugierten des Nenners erweitern, um rein reellen Nenner zu kriegen.
2. Eine kleine Wertetabelle für wichtige Kreisfrequenzen $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ (Resonanzfreq. $\hat{=} Im(H(j\omega_0)) = 0$), $\omega \to \infty$, aufstellen, also $Re\{H(j\cdot 0)\}, Im\{H(j\cdot 0)\}$; $Re\{H(j\cdot\omega_0)\}, Im\{H(j\omega_0)\}$; $Re\{H(\infty)\}, Im\{H(\infty)\}$ bestimmen. Evtl. einige weitere Werte bestimmen.
3. Ortskurve in komplexer Ebene mithilfe der berechneten Werte, möglichst glatt einzeichnen. Dabei mit Pfeilen die Richtung der steigenden Kreisfrequenz ω (von $\omega = 0$ in Richt. $\omega \to \infty$) andeuten und auch Punkte mit $\omega = 0$, $\omega \to \infty$ kennzeichnen.

<u>Bsp:</u> $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \overset{1)}{\underset{\text{mit komp.-konj. erweitern}}{\Longrightarrow}} H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} \Rightarrow Re(H(j\omega)) = \frac{1}{1+\omega^2}, \; Im(H(j\omega)) = \frac{-\omega}{1+\omega^2}$

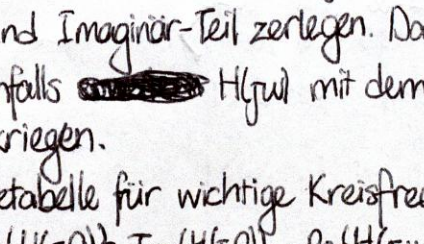
$(1-j\omega)$

• $\omega_0 = 0$ in diesem Spezialfall. ⟹ Wertetabelle:

ω	0	1	∞
Re	1	½	0
Im	0	-½	0

← anderer Wert

⟹ Ortskurve qualitativ:



- Energie und Leistung:

→ Folgende Formeln sind nur für sinusförmige Erregung (Strom & Spannung) gültig.

- Momentanleistung: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$
- Leistungsmittelwert: $P_W = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)dt$, T ist Periodendauer

→ Zeigerdarstellung: $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$, $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha)$ $\Rightarrow P_W = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{I_m^2 R}{2}$

- Effektivwerte: $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

- $P = \frac{1}{2} U I^* = \frac{1}{2} U_m \exp(j\alpha_U) \cdot I_m \exp(-j\alpha_I) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \exp(j(\alpha_U - \alpha_I)) = U_{eff} I_{eff} \cdot \exp(j\underbrace{(\alpha_U - \alpha_I)}_{\text{Phasenverschiebung}}))$

- Wirkleistung: $P_W = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) i(t) dt = U_{eff} I_{eff} \cos(\alpha_U - \alpha_I)$

$$\Rightarrow \boxed{Re(P) = Re\left(\frac{1}{2} U I^*\right) = P_W}$$

- Blindleistung: $\boxed{P_B = Im(P)}$

$$\Rightarrow \boxed{P = P_W + j P_B}$$

P heißt <u>Scheinleistung</u> oder <u>komplexe Leistung</u>.