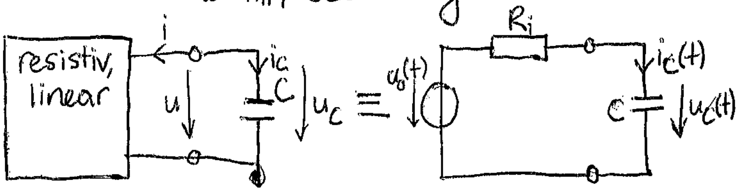
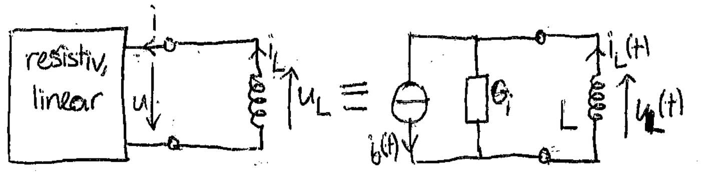
Kapitel 12 - Schaltungen ersten Grades

→ Schaltungen mit entweder einer Kapazität oder einer Induktivität
→ Beschreibung durch eine Differentialgleichung ersten Grades (= Zustandsgröße und ihre erste Ableitung sind in einer Gleichung)

Lineare, zeitinvariante Schaltungen 1. Grades:

→ Alle Elemente sind linear. Es gibt ein reaktives und sonst resistive Elemente:
⇒ Helmholtz/Thévenin (kap.) oder Mayer/Norton (ind.) ESB um resistiven Teil zu vereinfachen.





Einschub: Wiederholung ST1: Jede lineare, resistive, eindeutig lösbare Schaltung lässt sich durch eine der obigen ESBs ersetzen.

• Wenn nur eine Quelle im resistiven Netzwerk:

• Leerlaufspannung berechnen (u_0):
1) $i=0$ setzen (LL)
2) Wenn die Quelle evtl. eine Stromquelle ist, diese in eine Spannungsquelle umwandeln. (optional)
3) U_0 in Abhängigkeit von der Quellenspannung und ggf. anderen Bauelementegrößen bestimmen: $U_0 = f(u_q, \dots)\big|_{i=0}$

• Innenwiderstand bestimmen:
1) Spannungsquelle mit KS ersetzen ($\Leftrightarrow u_q = 0$).
2) R_i durch $R_i = \frac{u}{i}$ berechnen.

• Kurzschlussstrom berechnen (i_0):
1) $u=0$ setzen (KS)
2) Wenn die Quelle evtl. eine Spannungsquelle ist, diese in eine Stromquelle umwandeln. (optional)
3) I_0 in Abhängigkeit von dem Quellenstrom und ggf. anderen Bauelementegrößen bestimmen: $I_0 = f(i_q, \dots)\big|_{u=0}$

• Innenleitwert bestimmen:
1) Stromquelle mit LL ersetzen ($\Leftrightarrow i_q = 0$).
2) G_i durch $G_i = \frac{i}{u}$ berechnen.

• Wenn mehrere Quellen im resistiven Netzwerk:
→ Superpositionsprinzip anwenden
1) Alle unabhängige Quellen auf Null setzen und Innenwiderstand, bzw. Innenleitwert bestimmen.
2) Alle unabh. Quellen bis auf eine auf Null setzen.
3) Für dieses Netzwerk die LL-Spannung $U_{0_1} = f(u_{q_1}, \dots)\big|_{i=0}$ bzw. KS-Strom $I_{0_1} = f(i_{q_1}, \dots)\big|_{u=0}$ bestimmen.
4) 2. und 3. Schritte für jede einzelne Quelle durchführen.
5) Gesamt-LL-Spannung U_0, bzw. Gesamt-KS-Strom I_0 durch die Summe aller einzelnen Ergebnisse berechnen.

→ Durch KCL und KVL kann man dann die entsprechende Differentialgleichung in Form $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$ aufstellen. Diese Gleichung heißt Zustandsgleichung. A und B sind Konstanten.
• $x(t)$ ist der zeitliche Verlauf von der Zustandsvariable x ($= u_C$ (für Kapazität), $= i_L$ (für Induktivität)).
⇒ Kapazität: $x = u_C$, Induktivität: $x = i_L$
→ Dieser Verlauf $x(t)$ ist durch die Lösung der Zustandsgleichung zu finden! (mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$)
• $v(t)$ ist die Erregung, bspw. eine Spannung oder ein Strom, durch Anschluss einer Quelle im Zeitpunkt t_0.

→ Konstante Erregung ($v(t)$ ist konst.):

Zustandsgleichung in diesem Fall lautet:

Anfangswert

Kapazität: $\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau} u_C(t) + \frac{1}{\tau} u_{C\infty}$, $u_C(t_0) = u_0$ Induktivität: $\dot{i}_L(t) = -\frac{1}{\tau} i_L(t) + \frac{1}{\tau} i_{L\infty}$, $i_L(t_0) = i_0$

mit $\tau = R_i C$, R ist Innenwiderstand
$u_{C\infty} = u_C(\infty) = V = U_0$ (nun konstante LL-Spannung)

mit $\tau = GL$, G ist Innenleitwert
$i_{L\infty} = i_L(\infty) = V = I_0$ (nun konstante KS-Strom)

Gleichgewichtszustand

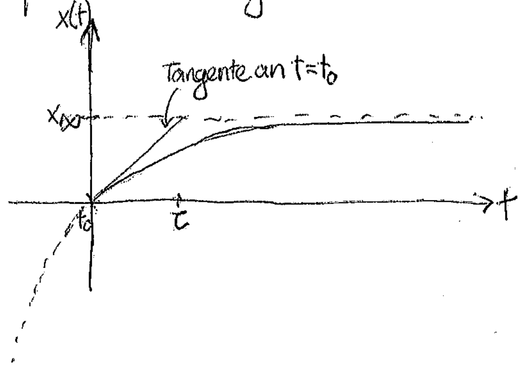
→ Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\boxed{u_C(t) = u_{C\infty} + [u_0 - u_{C\infty}] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \forall t \geq t_0}, \quad \boxed{i_L(t) = i_{L\infty} + [i_0 - i_{L\infty}] \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}, \forall t \geq t_0}$$

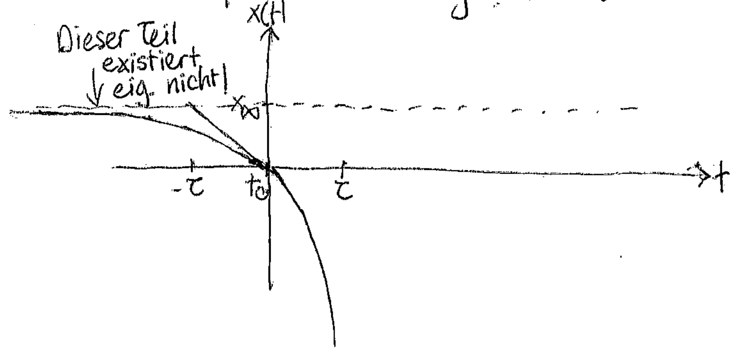
Allgemeine Vorgehensweise:

1) Zustandsgröße bestimmen, für Kapazität: $u_C(t)$, für Induktivität: $i_L(t)$.
2) Zustandsgleichung aufstellen (nicht unbedingt erforderlich)
3) Resistiven Teil mit dem geeigneten ESB darstellen (siehe Einschub oben) und die Zeitkonstante τ, durch $\tau = RC$, bzw. $\tau = GL$ bestimmen. Beachte: • $\tau > 0 \Rightarrow$ stabile Schaltung, • $\tau < 0 \Rightarrow$ instabile Schaltung
4) Gleichgewichtszustand $u_{C\infty} = U_0$, bzw. $i_{L\infty} = I_0$ mithilfe ESBs von oben bestimmen.
5) Unter Ausnutzung dieser Parameter und des Anfangswerts (i.d.R. gegeben) die Lösung für die Zustandsgröße aufschreiben (siehe oben).
6) Den zeitlichen Verlauf der Zustandsgröße skizzieren (siehe dazu Skript, jedoch alle 3 Tipps da sind nicht sehr stark erforderlich, wobei die erste ist schon empfehlenswert)

→ $\tau > 0 \Leftrightarrow$ Schaltung ist stabil
$\Rightarrow u_{C\infty}$ bzw. $i_{C\infty}$ ist für $t \to +\infty$ erreicht, also man geht ins Gleichgewichtszustand.
$\Rightarrow$ für $t \to -\infty$ divergiert die Kurve.



→ $\tau < 0 \Leftrightarrow$ Schaltung ist instabil
$\Rightarrow u_{C\infty}$ bzw. $i_{C\infty}$ ist für $t \to -\infty$ erreicht!, also man weicht quasi aus dem Gleichgewichtszustand ab.
$\Rightarrow$ für $t \to +\infty$ divergiert die Kurve



→ Man kann alle anderen Größen dann auch mittels KCL, KVL bestimmen und wie oben skizzieren.

→ Abschnittsweise, konstante Erregung (v ist stückweise konstant)

• Da die Erregung in bestimmten Zeitintervallen jeweils konstant ist, in jedem Teilintervall analog zu obiger Vorgehensweise arbeiten.
1) Für das erste Intervall beginnend mit t_0, wie oben arbeiten, aber die Zeichnung am Anfang der zweiten Intervall unterbrechen.
2) Den Wert am Ende des ersten Intervalls durch Einsetzen dieses Zeitpunkts in die Lösung erstes Bereichs bestimmen.
3) Für den zweiten Bereich wie oben arbeiten, aber als Anfangswert den Endwert aus Schritt 2) verwenden.
4) Am letzten Intervall die Zeichnung konvergieren (oder wenn instabil divergieren) lassen.

Zu Beachten:
• Für jedes Intervall ist x_∞ durch LL-Spannung U_0 oder KS-Strom I_0 definiert (aber wird i.d.R. nicht erreicht)
• Zustandsgröße $u_C(t)$, bzw. $i_L(t)$ muss stetig sein! (wenn die Erregung beschränkt ist)

→ Allgemeine Erregung (v ist beliebig)

• Die Zustandsgleichung bleibt gleich, aber die Lösung sieht folgendermaßen aus:

Kapazität:
$$u_C(t) = \underbrace{u_C(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\substack{\text{zero-input-response} \\ \text{(Antwort ohne Erregung)}}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} U_0(t') \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'}_{\substack{\text{zero-state-response} \\ \text{(Antwort mit verschwindendem Anfangswert)}}}$$

→ Vorgehen wie bei konstanter Erregung, nur der Lösungsansatz für die Zustandsgleichung ist anders.

Induktivität:
$$i_L(t) = i_L(t_0) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} I_0(t') \cdot e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt'$$

→ Lineare, zeitvariante Schaltungen 1. Grades:

• Die Schaltung und ihr Aufbau ändert sich zeitlich.
$\Rightarrow$ Neues ESB, neue Zeitkonstante τ.