Kapitel 13 - Lineare Schaltungen zweiten Grades

→ Wie der Zusammenhang zwischen resistiven Eintoren und Zweitoren können die Methoden von vorherigem Kapitel für Schaltungen zweiten Grades erweitert werden.

→ Schaltungen mit <u>zwei</u> <u>linearen</u> Reaktanzen und einem resistiven <u>Zweitor</u>

→ Beschreibung durch ein System von zwei Differentialgleichungen ersten Grades (=Zustandsgleichungen)

• Aufstellen der Zustandsgleichungen

→ Die beiden Gleichungen können mit Hilfe KCL und KVL Gleichungen bekannterweise bestimmt werden.

→ Allgemeine Form der Zustandsgleichungen:

- Nur eine Erregung $v(t)$: $\underbrace{\dot{\underline{x}}}_{\text{Zustandsvektor}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot \underbrace{v(t)}_{\text{Erregung}}$ mit $\underset{\sim}{A}$:= Zustandsmatrix und $\underline{b}$:= Einkoppelvektor

- Mehrere Erregungen $\underline{v}(t)$ (Vektor jetzt): $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} + \underset{\sim}{B} \cdot \underline{v}(t)$

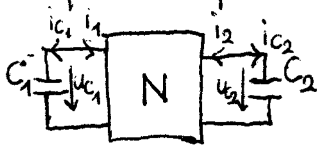
und ggf. Ausgangsgleichung: $\underline{y} = \underset{\sim}{C} \cdot \underline{x} + \underset{\sim}{D} \cdot \underline{v}(t)$

→ Systematisches Vorgehen um die Zustandsgleichungen aufzustellen:

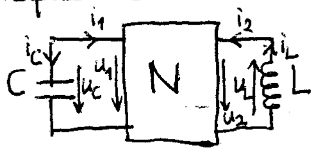
1) Die Schaltung in ein <u>resistives</u> Zweitor mit 2 <u>externen</u> Reaktanzen zerlegen.

- 3 Fälle:

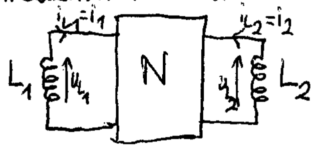
I) Kapazität & Kapazität:



II) Kapazität & Induktivität:



III) Induktivität & Induktivität:



2) Zustandsgrößen bestimmen.

I) $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \end{bmatrix}$

II) $\underline{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$

III) $\underline{x} = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix}$

3) KCL und KVL mit konstituierenden Gleichungen nutzen.

I) $i_{C_1} = C_1 \cdot \dot u_{C_1}$, $i_{C_2} = C_2 \cdot \dot u_{C_2}$

$i_{C_1} = -i_1$, $i_{C_2} = -i_2$, $u_{C_1} = u_1$, $u_{C_2} = u_2$

$\Rightarrow \dot u_1 = \frac{-1}{C_1} \cdot i_1$, $\dot u_2 = \frac{-1}{C_2} \cdot i_2$, $\begin{bmatrix} \dot u_1 \\ \dot u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

II) $i_C = C \cdot \dot u_C$, $u_L = L \cdot \dot i_L$

$i_C = -i_1$, $u_C = u_1$, $i_L = i_2$, $u_L = -u_2$

$\Rightarrow \dot u_1 = \frac{-1}{C} \cdot i_1$, $\dot i_2 = \frac{-1}{L} \cdot u_2$, $\begin{bmatrix} \dot u_1 \\ \dot i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

III) $u_{L_1} = L_1 \cdot \dot i_{L_1}$, $u_{L_2} = L_2 \cdot \dot i_{L_2}$

$i_{L_1} = i_1$, $i_{L_2} = i_2$, $u_{L_1} = -u_1$, $u_{L_2} = -u_2$

$\Rightarrow \dot i_1 = \frac{-1}{L_1} \cdot u_1$, $\dot i_2 = \frac{-1}{L_2} \cdot u_2$, $\begin{bmatrix} \dot i_1 \\ \dot i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

4) Die geeignete, explizite Zweitorbeschreibung für N wählen, um die in Zustandsgleichungen nicht vorkommende Größen zu eliminieren. Beachte dabei, dass N i.A. nicht quellenfrei ist.

I) i_1, i_2 müssen eliminiert werden.

⇒ Leitwertsbeschreibung:

$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{G} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} i_{0_1} \\ i_{0_2} \end{bmatrix}}_{\text{externe Quellen}}$

II) i_1, u_2 sollen ersetzt werden.

⇒ inverse Hybridbeschreibung:

$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{H}' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} i_{0_1} \\ u_{0_2} \end{bmatrix}}_{\text{ext. Quellen}}$

III) u_1, u_2 sind zu eliminieren.

⇒ Widerstandsbeschreibung:

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{R} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{0_1} \\ u_{0_2} \end{bmatrix}}_{\text{ext. Quellen}}$

5) Oben gewählte Beschreibung mittels Methoden aus Schaltungstechnik 1 bestimmen.

Einschub:

→ Bestimmung der expliziten Beschreibung von N:

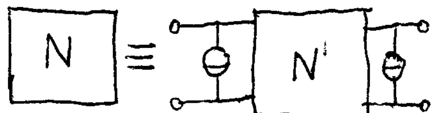
• konstante Quellen auf Null setzen.

• für entstandenes streng lineares Zweitor die verlangte Zweitormatrix aufstellen

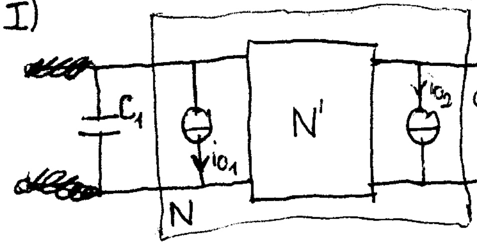
• Die steuernden Größen auf Null setzen (Leerlauf/Kurzschluss an den Toren), wobei die Quellen nicht mehr auf Null gesetzt werden.

• Quellenvektor bestimmen

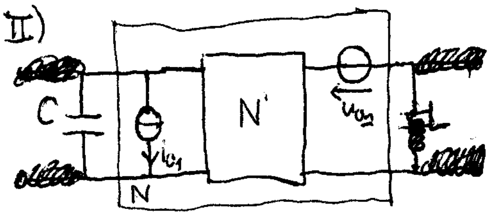
→ESB mit externen Quellen:
1) Der Zweitormatrix entsprechendes streng lineares Zweitor N' zeichnen.
2) Die Tore mit geeigneten Quellen ausgehend von dem Quellenvektor beschalten. ⇒



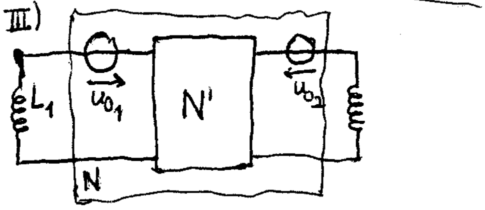
I)



II)



III)



3) Die Beschreibungen einsetzen und auf die allgemeine Form der Zustandsgleichungen bringen.

I)
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot u_1\\ \dot u_2\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot \underset{\sim}{G}}_{\underset{\sim}{A}}\cdot \underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \overbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{0_1}\\ i_{0_2}\end{bmatrix}}^{B\cdot \underline{v}(t)}$$

II)
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot u_1\\ \dot i_2\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{L}\end{bmatrix}\cdot \underset{\sim}{H}'}_{\underset{\sim}{A}}\cdot \underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ i_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{L}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_{0_1}\\ u_{0_2}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}\cdot \underline{v}(t)}$$

III)
$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot i_1\\ \dot i_2\end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{L_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{L_2}\end{bmatrix}\cdot \underset{\sim}{R}}_{\underset{\sim}{A}}\cdot \underbrace{\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{u_{0_1}}{L_1}\\ -\frac{u_{0_2}}{L_2}\end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{B}\cdot \underline{v}(t)}$$

→Beachte dabei, dass folgendes gilt:

I) $\begin{bmatrix}i_{0_1}\\ i_{0_2}\end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}\cdot\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{C_2}\end{bmatrix}\cdot\underset{\sim}{T}$

II) $\begin{bmatrix}i_{0_1}\\ u_{0_2}\end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}\cdot\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{C} & 0\\ 0 & -\frac{1}{L}\end{bmatrix}\cdot\underset{\sim}{T}$

III) $\begin{bmatrix}u_{0_1}\\ u_{0_2}\end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}\cdot\begin{bmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{L_1} & 0\\ 0 & -\frac{1}{L_2}\end{bmatrix}\cdot\underset{\sim}{T}$

- Also müssen die Ersatzquellen nicht direkt gleich zu den Erregungen $\underline{v}(t)$ sein. In diesem Fall bildet eine Transformationsmatrix $\underset{\sim}{T}$ die Erregungen auf Ersatzquellen ab. Wenn diese identisch sind, dann ist $\underset{\sim}{T}$ die Einheitsmatrix.

→ Es könnte auch eine vierte Art der Beschaltung mit Induktivität am Tor 1 und Kapazität am Tor 2 diskutiert werden, wobei man mit Hybridmatrix $\underset{\sim}{H}$ arbeiten würde. Jedoch kann man so eine Schaltung immer umdrehen und eine Schaltung der Typ II) gewährleisten.

• Lösung der Zustandsgleichungen

→ Transformation auf Normalform - Homogene DGL (Ohne Erregung)

- Eine Differentialgleichung ohne Erregung hat allgemein die Form: $\dot x = Ax$ mit einer Konstante A. Diese Gleichung löst eine Funktion, deren erste Ableitung quasi sich selbst ist. So eine Eigenschaft hat die Exponentialfunktion: $x = c\cdot e^{At}$ wobei c eine Konstante ist.

- Diese Lösung kann auf die vektorielle Zustandsgleichungen, mit den man sich in ST2 beschäftigt, durch das Einführen der Matrixexponentielle erweitert werden (siehe Mathe 3):

$\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\cdot\underline{x} \Rightarrow \underline{x}(t) = e^{\underset{\sim}{A}t}\cdot\underline{x}_0$, $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$

- Die Matrixexponentielle e^{At} kann durch Reihenentwicklung numerisch oder mit Hilfe des Ansatzes: $e^{At} = e^{\lambda t}$, wobei λ ein Eigenwert von der Matrix $\underset{\sim}{A}$ ist (siehe Mathe 2 und 3), berechnet werden.

→ Also die Lösungsvektoren von $\lambda e^{\lambda t}\cdot\underline{x}_0 = e^{\lambda t}\underset{\sim}{A}\cdot\underline{x}_0 \Leftrightarrow (\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\underline{x}_0 = 0$ sind zu bestimmen. Lösung mit $\underline{x}_0 = 0$ ist trivial und uninteressant. Für $\underline{x}_0 \neq 0$ muss gelten: $\det(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I}) = 0$.

$$\Rightarrow \det(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I}) = \det\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{bmatrix} = \underbrace{\lambda^2 - \lambda T + \Delta}_{\text{charakteristische Polynom}} \overset{!}{=} 0$$
, wobei $\boxed{T = \underbrace{Sp}_{\text{Spur}}\underset{\sim}{A} = a_{11}+a_{22}}$ und $\boxed{\Delta = \underbrace{\det}_{\text{Determinante}}\underset{\sim}{A} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

→ Mit Mitternachtsformel gilt für Eigenwerte (für Sch. 2. Grades 2 Stück): $\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4}-\Delta}}$

→ Eigenvektoren sind andere Parameter der Lösung $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\cdot\underline{x}_0 = e^{\lambda t}\cdot\underline{q}$; $\underline{q}$ ist Eigenvektor:

• $\underline{q}$ wird bestimmt durch das Lösen von $(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\cdot\underline{q} = 0$

- Eine einfachere Methode wird gleich diskutiert.

→ Schließlich bekommt man zwei spezielle Lösungen (siehe Mathe 3) von der DGL. Mittels reeller Konstanten c_1, c_2 kann die allgemeine Lösung gegeben werden:

spez. Lsgen: $\underline{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot q_1$, $\underline{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot q_2$ $\Rightarrow$ allg. Lsg.: $\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} q_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} q_2$.

→ Wenn die Anfangsbedingungen x_0 gegeben sind, kann man c_1 und c_2 durch Einsetzen bestimmen.

- Kochrezept um die Lösung zu bestimmen (homogene DGL):

- DGL lautet allgemein: $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{\underline{A}} \cdot \underline{x}$

1) Eigenwerte λ_1, λ_2 bestimmen:

$T = a_{11} + a_{22}$,
$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\quad \lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$

2) Eigenvektoren q_1, q_2 bestimmen (für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ wird später diskutiert):

$\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}$: • $a_{12} \neq 0 \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}$, $q_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}$

• $a_{12} = 0$, $a_{21} \neq 0 \Rightarrow q_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix}$, $q_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix}$

• $a_{12} = a_{21} = 0$, dann sind die beiden Gleichungen vollständig entkoppelt und beliebige zwei linear unabhängige Vektoren sind Eigenvektoren, z.B.: $q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Die allgemeine Lösung aufstellen:

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot q_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} q_2$

4) ggf. c_1, c_2 mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.