Kapitel 13 - Schaltungen 2. Grades

- Transformation auf Normalform für homogene Zustandsgleichungen

- Nachdem die Eigenwerte und Eigenvektoren gemäß des Kochrezepts aus letzter Zusammenfassung berechnet werden, kann das Gleichungssystem $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x}$ auf Normalform transformiert werden.
- Ziel der Transformation ist vollständige Entkopplung beider Gleichungen (Zeilen).
- Die allgemeine Lösung kann auch danach einfach hergeleitet werden.

→ Zunächst bildet man die Modalmatrix $\underset{\sim}{Q}$, die als Spalten die Eigenvektoren hat: $\underset{\sim}{Q} = [q_1 \;\; q_2]$

→ Nachdem $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Q} = \lambda \cdot \underset{\sim}{Q}$ gilt: $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{A} \cdot [q_1 \;\; q_2] = [\lambda_1 q_1 \;\; \lambda_2 q_2] = [q_1 \;\; q_2] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\hat{=}\, \underset{\sim}{\Lambda}}$

→ Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, dann ist $\underset{\sim}{Q}$ invertierbar: $\underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ ← Diagonalmatrix

$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} \Leftrightarrow \dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{Q} \cdot \underset{\sim}{\Lambda} \cdot \underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underline{x} \Leftrightarrow \underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{\Lambda} \cdot \underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underline{x}$

→ Nennt man $\underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underline{x} = \underline{\xi}$: $\boxed{\dot{\underline{\xi}} = \underset{\sim}{\Lambda} \cdot \underline{\xi}}$ → Man erhält damit 2 völlig entkoppelte DGLs für ξ_1 und ξ_2.

→ Die Lösung lautet dann $\underline{\xi}(t) = e^{\underset{\sim}{\Lambda} t} \cdot \underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \cdot \underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_{01} \\ e^{\lambda_2 t} \xi_{02} \end{bmatrix}$ ($\underline{\xi}_0$ ist mit gegebenen Anfangswerten zu bestimmen)

→ Ist man an $\underline{x}(t)$ interessiert, dann kann die Rücktransformation einfach durchgeführt werden:
$\underline{x}(t) = \underset{\sim}{Q} \cdot \underline{\xi}(t) = [q_1 \;\; q_2] \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_{01} \\ e^{\lambda_2 t} \xi_{02} \end{bmatrix}$

→ Die Hin- und Rücktransformationsformel für Anfangswerte $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ lauten: $\underline{x}_0 = \underset{\sim}{Q} \cdot \underline{\xi}_0$, $\underline{\xi}_0 = \underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underline{x}_0$

- Trafo auf Normalform für autonome (mit konstanter Erregung) Zustandsgleichungen. ($\underline{v}(t) = \text{const.}$)

- Die bisher besprochene Kochrezept und Transformationsmethode konzentrierten sich auf homogene DGLs von der Form $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x}$. Im Allgemeinen findet man Erregungen in den Schaltungen und daher die allgemeine Form der Zustandsgleichungen: $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} + \underset{\sim}{B} \cdot \underline{v}_0$.
- In diesem Fall berechnet man die Lösung, indem die autonome DGL auf eine homogene DGL transformiert wird: $\boxed{\dot{\underline{x}}' = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x}'}$, dabei gilt: $\boxed{\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_{\infty}}$, $\boxed{\dot{\underline{x}}' = \dot{\underline{x}}}$, $\boxed{\underline{x}_{\infty} = -\underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot \underline{v}_0}$

→ Die homogene Gleichung wird dann mit den bekannten Methoden gelöst (wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

→ $\underline{x}(t)$ wird dann einfach mittels $\underline{x}(t) = \underline{x}'(t) + \underline{x}_{\infty}$ berechnet.

→ Diese Koordinatentransformation entspricht der Verschiebung des Ursprungs zu $\underline{x}_{\infty}$.

- Trafo auf Normalform für Zustandsgleichungen mit allgemeiner Erregung ($\underline{v}(t)$ ist allgemein)

→ Erweiterung des eindimensionalen Falls:

$$\boxed{\underline{x}(t) = e^{\underset{\sim}{A} t} \cdot \underline{x}_0 + \int_0^t e^{\underset{\sim}{A}(t-t')} \underset{\sim}{B} \underline{v}(t') dt'}$$

→ Trafo auf Normalform mit $\underline{\xi} = \underset{\sim}{Q}^{-1} \underline{x}$, $\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{Q}^{-1} \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{Q} = [q_1 \;\; q_2]$, $\underset{\sim}{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ wie beim homogenen Fall, ergibt:

$$\boxed{\dot{\underline{\xi}} = \underset{\sim}{\Lambda} \cdot \underline{\xi} + \underset{\sim}{Q}^{-1} \underset{\sim}{B} \cdot \underline{v}}$$

→ Die Lösung dafür lautet: $\underline{\xi}(t) = e^{\underset{\sim}{\Lambda} t} \underline{\xi}_0 + \int_0^t e^{\underset{\sim}{\Lambda}(t-t')} \cdot \underset{\sim}{Q}^{-1} \cdot \underset{\sim}{B} \cdot \underline{v}(t') dt'$

→ Rücktrafo ergibt dann die Lösung für $\underline{x}$: $\underline{x}(t) = \underset{\sim}{Q} \cdot \underline{\xi}(t)$

• Trafo auf Jordan-Normalform

- Ursprünglich wird die Matrix $\underset{\sim}{A}$ mit dem Ansatz $\underset{\sim}{\Lambda}=\underset{\sim}{Q}^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}$ auf Normalform transformiert. Das geht nur dann, wenn $\underset{\sim}{Q}$ invertierbar ist, also q_1 und q_2 linear unabhängig sind. Die Voraussetzung dafür ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- Wenn $\lambda_1=\lambda_2$ ist die Trafo auf Normalform, d.h. vollständige Entkopplung beider Gleichungen nicht möglich. Dann verwendet man die Jordan-Normalform, womit auch relativ einfach die Lösung aufgestellt werden kann.

→ Jordan-Matrix hat die Form: $\underset{\sim}{J}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ mit $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

→ Zunächst soll $\underset{\sim}{Q}'=[q_1' \;\; q_2']$ mit $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}'=\underset{\sim}{Q}'\cdot\underset{\sim}{J}$ bestimmt werden.

→ q_1' ist zur λ zugehörige Eigenvektor: $q_1'=\begin{bmatrix}-a_{12}\\ a_{11}-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_{12}\\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\end{bmatrix}$

→ q_2' ist so gewählt, dass $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}'=\underset{\sim}{Q}'\cdot\underset{\sim}{J}$ erfüllt ist: $q_2'=\begin{bmatrix}-a_{12}\cdot 1s\\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot 1s-1\end{bmatrix}$

→ Dann gilt die Trafovorschrift: $\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{Q}'^{-1}\cdot\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Q}'$

⇒ Man erhält die (im hom. Fall) Gleichung $\boxed{\dot{\underset{\sim}{\xi}}=\underset{\sim}{J}\cdot\underset{\sim}{\xi}}$ mit $\underset{\sim}{\xi}=\underset{\sim}{Q}'^{-1}\cdot\underset{\sim}{x}$.

→ Die Lösung lautet: $\underset{\sim}{\xi}(t)=e^{\underset{\sim}{J}t}\cdot\underset{\sim}{\xi}_0=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi_{01}\\ \xi_{02}\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}(\xi_{01}+t\xi_{02})\\ e^{\lambda t}\cdot\xi_{02}\end{bmatrix}$$

→ Um $\underset{\sim}{x}(t)$ zu bestimmen führt man folgende Rücktrafo durch: $\boxed{\underset{\sim}{x}(t)=\underset{\sim}{Q}'\cdot\underset{\sim}{\xi}(t)}$

- Die Kochrezept von letzter Zusammenfassung kann man für $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ folgendermaßen modifizieren:

1) Eigenwert λ bestimmen:
$$\lambda=\frac{T}{2}\pm\underbrace{\sqrt{\frac{T^2}{4}-\Delta}}_{\text{Dieser Teil wird Null sein.}}$$

2) q_1' und q_2' bestimmen:
$\underline{\lambda_1=\lambda_2}$: $q_1'=\begin{bmatrix}-a_{12}\\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\end{bmatrix}$, $q_2'=\begin{bmatrix}-a_{12}\cdot 1s\\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2}\cdot 1s-1\end{bmatrix}$

3) Die allgemeine Lösung aufstellen:
$$\underset{\sim}{x}(t)=e^{\lambda t}\left[\underset{\sim}{I}+(\underset{\sim}{A}-\lambda\underset{\sim}{I})\,t\right]\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

4) ggf. c_1, c_2 mit Hilfe der Anfangswerte bestimmen.

→ Obige Erklärungen gelten für homogene Systeme. Für autonome Systeme soll man zuerst die Transformation auf ein homogenes System durchführen und dann mit obigen Methoden arbeiten.