

Zusammenfassung 6 - Kapitel 13 - Lineare Schaltungen 2. Grades

Transformation auf reellwertige Normalform

- Bisher wurde der Fall komplexer Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ nicht separat behandelt, da die Transformation auf Normalform auch ganz normal durchgeführt werden kann. Die Vorschrift $\tilde{\Lambda} = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ führt dann auf die komplexwertige diagonale Normalform:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} \quad (\text{mit } Q = [q \ q^*])$$

- Es existiert aber für komplexe Eigenwerte auch eine reellwertige Normalform

→ Die Herleitung ist folgendermaßen:

- Die komplexen Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha \pm j\beta \in \mathbb{C}$ führen zu komplex konjugierten Eigenvektoren $q_1 = q_2^* = q = q_r + j q_i$.

$$\Rightarrow q_r = q_r + j q_i, \quad q_i = q_r - j q_i$$

- Das komplexe Gleichungssystem $A \cdot Q = Q \cdot \tilde{\Lambda}$ wird umgeformt:

$$A \cdot \begin{bmatrix} q_r + j q_i & q_r - j q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_r + j q_i & q_r - j q_i \end{bmatrix} \cdot \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{erste Spalte davon: } A \cdot (q_r + j q_i) = (\alpha + j\beta) \cdot (q_r + j q_i)$$

⇒ Ausmultiplizieren ergibt: $A \cdot q_r + j A \cdot q_i = \alpha q_r + j \alpha q_i + j \beta q_r - \beta q_i \Rightarrow$ für die Gleichheit müssen sowohl Realteil als auch Imaginärteil gleich sein.

$$\Rightarrow A \cdot q_r = \alpha \cdot q_r - \beta q_i \quad (\text{Realteil})$$

$$A \cdot q_i = \alpha \cdot q_i + \beta q_r \Leftrightarrow -A \cdot q_i = -\beta q_r - \alpha q_i$$

$$\Rightarrow \text{In Matrix-Vektor-Notation: } A \cdot \begin{bmatrix} q_r & -q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_r & -q_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} \cdot Q' = Q' \cdot \Lambda'$$

→ Also lautet die Normalform:

$$\tilde{\Lambda}' = Q'^{-1} \cdot A \cdot Q' = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } Q' = \begin{bmatrix} q_r & -q_i \end{bmatrix}$$

- Es gilt die Zusammenhänge zwischen komplex- und reellwertigen Normalformen:

$$\tilde{A} = Q \cdot \tilde{\Lambda} \cdot Q^{-1} = Q' \cdot \tilde{\Lambda}' \cdot Q'^{-1}, \Rightarrow x = Q \cdot \xi = Q' \cdot \xi', \Rightarrow \xi' = Q'^{-1} \cdot Q \cdot \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \cdot \xi$$

- Die allgemeine Lösung hat in x_1 - x_2 -Ebene folgende Form:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot [\cos(\beta t) \cdot q_r - \sin(\beta t) \cdot q_i] + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot [\sin(\beta t) \cdot q_r + \cos(\beta t) \cdot q_i]$$

- Für die ~~spezielle~~ spezielle Lösung, also um c_1, c_2 zu bestimmen, müssen ggf. Anfangswerte verwendet werden.

→ Im Falle der komplexen Eigenwerte soll man also:

• Q' bestimmen

• allg. Lösung aufstellen, ggf. c_1, c_2 mit AW bestimmen.

→ Dieser Algorithmus kann wie bei ursprünglichen Zusammenfassungen auf autonome Systeme erweitert werden.

• Phasenportraits

- Trajektorien sind die Kurven, die den Zustandsvektor $x(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit mit jeweils einem Anfangswert x_0 im Zustandsraum (x_1 - x_2 -Ebene) darstellen.

- Phasenportrait ist die Gesamtheit aller solchen Kurven mit verschiedenen Anfangswerten.

- Man kann alle (unendlich viele) Trajektorien natürlich nicht hinzeichnen, aber trotzdem illustrieren die Phasenportraits die dynamischen Verhalten der reaktiven Schaltungen ganz gut, indem sie den Verlauf der Größen in den Gleichgewichtspunkt hinein (stabil) oder aus dem heraus (instabil) darstellen.

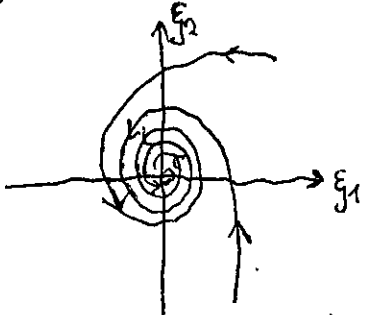
- Isoklinen sind Hilfskonstruktionen, auf den die Steigung konstant ist. Die Einzeichnung von Isoklinen werden aber meistens nicht erfordert.

- Das dynamische Verhalten ist komplett mit Eigenwerten und Eigenvektoren charakterisiert. Deshalb werden im folgenden (ausführlichere Diskussion im Skript) verschiedene Fälle untersucht

- Geeignete Tabellen für all diese Fälle kann man im Skript und in den Formelsammlungen finden.

1) stabiler Strudel: $\lambda_1 = \alpha + j\beta, \lambda_2 = \alpha - j\beta$

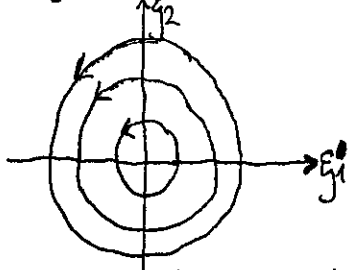
→ Trajektorien sind logarithmische Spirale.
 $\alpha < 0, \beta > 0$



→ Für $t \rightarrow \infty$ laufen die Trajektorien in GGP (Ursprung), deshalb stabil. (siehe Pfeilrichtungen)

2) Wirbelknoten:

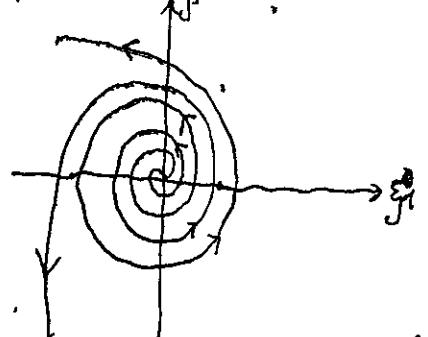
$\lambda_1 = \alpha + j\beta, \lambda_2 = \alpha - j\beta$
 $\Rightarrow \alpha = 0, \beta > 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm j\beta$)
 → Trajektorien sind Kreise



→ Für $t \rightarrow \infty$ laufen die Tr. nicht in GGP, daher instabil

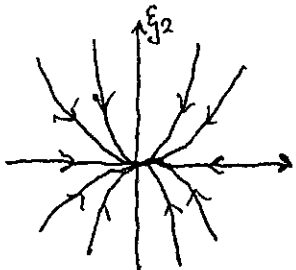
3) instabiler Strudel: $\lambda_1 = \alpha + j\beta, \lambda_2 = \alpha - j\beta$

→ Tr. sind logarithmische Spirale.
 $\alpha > 0, \beta > 0$



→ Für $t \rightarrow \infty$ laufen die Tr. aus dem GGP raus, deshalb instabil (GGP wird für $t \rightarrow -\infty$ erreicht)

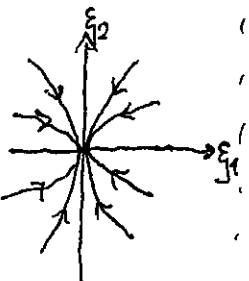
4) stabiler Knoten: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



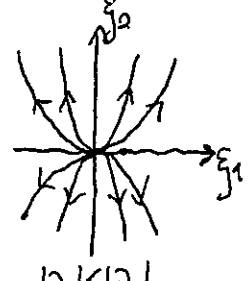
→ Traj. laufen von der schnellen in langsamen Eigenwertrichtung
 → Traj. laufen in GGP für $t \rightarrow \infty$, daher stabil.

$|\lambda_1| < |\lambda_2|$
 langsamer schneller EW

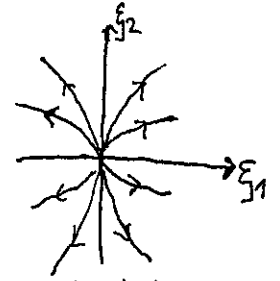
5) instabiler Knoten: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



$|\lambda_2| < |\lambda_1|$



$|\lambda_1| < |\lambda_2|$

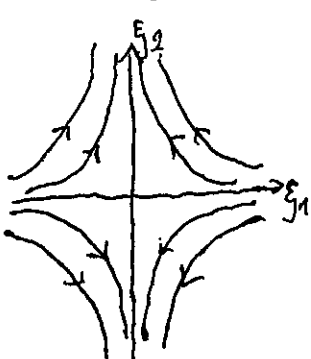


$|\lambda_2| > |\lambda_1|$

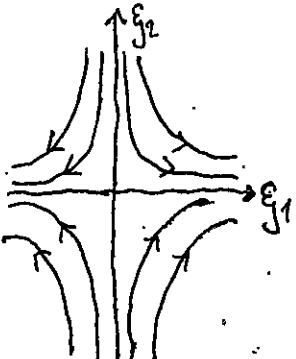
→ Tr. laufen aus GGP für $t \rightarrow \infty \Rightarrow$ instabil.

6) Sattelpunkte: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
 $\text{sgn} \lambda_1 \neq \text{sgn} \lambda_2$

→ Trajektorien sind Hyperbeln
 → Tr. laufen von der negativen zur positiven Eigenwertrichtung.



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

→ Der GGP wird nicht erreicht, daher instabil.

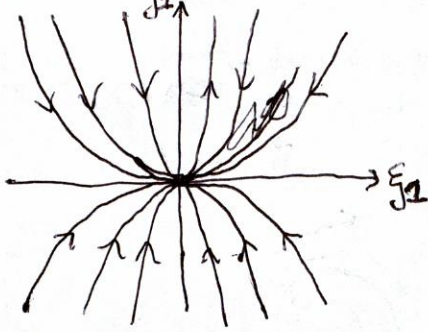
→ Die Phasenportraits, die hier diskutiert werden, sind bezogen auf Normalform ($\xi_1 - \xi_2$ -Ebene). Die Darstellung in $x_1 - x_2$ -Ebene durch $x = Q\xi$ ist durch eine Drehstreckung zu erzeugen. Ist das System nicht homogen, so ist der GGP in x -Ebene nicht im Ursprung, sondern bei x_{00} (siehe autonome Erregung).

→ Kochrezept um Phasenportraits zu zeichnen:

- 1) Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen, bei komplexen EWeN mit reellwertiger Normalform arbeiten.
- 2) GGP bestimmen.
- 3) Geeignete Transformation durchführen.
- 4) In $\xi_1 - \xi_2$ -Ebene das Phasenportrait zeichnen. Dabei die Tabelle mit Fallunterscheidungen benutzen.
 → EV sind hier Koordinatenachsen und GGP ist der Ursprung.
- 5) evtl. in $x_1 - x_2$ -Ebene das Phasenportrait zeichnen.
 → EV hinzeichnen und so interpretieren, ob sie die Achsen für Trajektorien sind
 → evtl. GGP ist unterschiedlich als Ursprung. Die Zeichnung soll dann so verschoben werden, dass sie um GGP x_{00} plaziert wird.

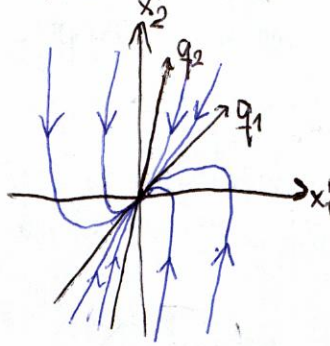
Bsp: (stabiler Knoten)

ξ_1 - ξ_2 -Ebene:



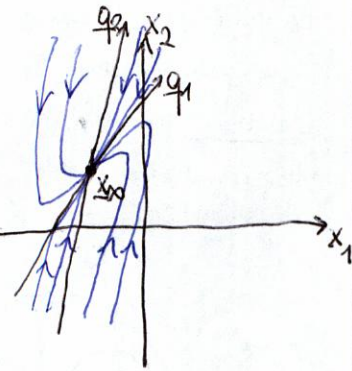
1. Schritt
Drehstreckung

x'_1 - x'_2 -Ebene:



2. Schritt
Verschiebung

x_1 - x_2 -Ebene:



→ Bemerkung: Wenn das System selber homogen ist, entfällt der 2. Schritt, die 2. Ebene ist dann x_1 - x_2 -Ebene.

→ Bei reellwertiger Normalform verwendet man, q_r und $-q_i$ statt q_1, q_2 .

→ Für die Stabilität der Systeme gilt:

$\text{Re}\{\lambda_i\} < 0 \Leftrightarrow$ stabil sonst instabil

→ Die degenerierten Fälle werden später besprochen.