Kapitel 14 - Nichtlineare dynamische Schaltungen

→ Bisher werden lineare Schaltungen zweiten Grades betrachtet, die sich mit Matrizen-Vektoren beschreiben lassen:
$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B}\,\underline{v}$

→ Jetzt werden nichtlineare Schaltungen betrachtet, die sich nur über Beschreibungen ausdrücken lassen:
$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$ (Analog dazu waren bei ST1 lineare Schaltungen mit Matrizen darstellbar, wobei für nichtlineare nur die (bspw. Widerstands-, Hybrid-, usw.) Beschreibungen existieren.)

↳ Dieses ist ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$\underline{x}$: Zustandsvektor, seine Komponenten sind Zustandsvariablen, $\underline{f}$: Zustandsbeschreibung

→ Wenn alle Elemente und Erregungen zeitinvariant sind, ergibt sich ein autonomes System:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underline{f}(\underline{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}}_{\text{nichtlineare Funktionen}}$$

(In ST2 nur nichtlineare Schaltungen <u>zweiten</u> Grades werden betrachtet, um chaotisches Verhalten, das bei Systemen höheren Grades auftreten kann, zu vermeiden.)

• Zustandsvariablen:

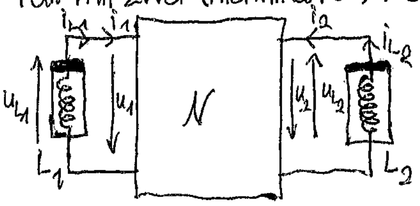
→ <u>Kapazität</u>: - C ist nur ladungsgesteuert. ⇒ Zustandsvariable ist q_C
- sonst (C ist nur u-gst. oder von beiden) ⇒ Zustandsvar. ist u_C

→ <u>Induktivität</u>: - L ist nur flussgesteuert. ⇒ Zustandsvar. ist Φ_L
- sonst ⇒ Zustandsvar. i_L

→ Wenn in einer Schaltung mindestens eine Reaktanz, die von keiner Größe gesteuert wird, vorkommt, dann kann die Zustandsbeschreibung nicht aufgestellt werden.
→ Wegen Stetigkeit von u_C und i_L ergibt sich ein Nachweisverfahren (siehe Skript), das aber schwer und aufwendig zum Durchführen ist, für die Existenz einer Zustandsbeschreibung. Daher wird es vermieden und man versucht direkt die Zustansbeschr. aufzustellen.

• Zustandsbeschreibungen

→ Im Skript wird der Fall mit 2 Kapazitäten behandelt. Hier der Fall mit zwei (nichtlinearen) Induktivitäten:



⇒ Annahmen:
- Beide Tore von N seien i-gst.
- Induktivitäten seien i-gst.:
• $\Phi_{L_1} = f_1(i_{L_1})$, $\Phi_{L_2} = f_2(i_{L_2})$
• $u_1 = r_1(i_1, i_2)$, $u_2 = r_2(i_1, i_2)$ (i.A. nicht linear ⇒ keine $\underline{B}$-Matrix)
$= r_1(i_{L_1}, i_{L_2})$ $= r_2(i_{L_1}, i_{L_2})$

→ KCL & KVL:
$u_1 = -u_{L_1}$, $u_2 = -u_{L_2}$, $i_1 = i_{L_1}$, $i_2 = i_{L_2}$

$$\Rightarrow -u_1 = u_{L_1} = \frac{d\Phi_{L_1}}{dt} = \frac{df_1(i_{L_1})}{di_{L_1}} \cdot \frac{di_{L_1}}{dt} = L_1(i_{L_1}) \cdot \dot{i}_{L_1}, \quad -u_2 = L_2(i_{L_2}) \cdot \dot{i}_{L_2} \Rightarrow \dot{i}_{L_1} = \frac{-u_1}{L_1(i_{L_1})}, \quad \dot{i}_{L_2} = \frac{-u_2}{L_2(i_{L_2})}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Zustandsgleichungen:}} \quad \dot{i}_{L_1} = \frac{-r_1(i_{L_1}, i_{L_2})}{L_1(i_{L_1})}, \quad \dot{i}_{L_2} = \frac{-r_2(i_{L_1}, i_{L_2})}{L_2(i_{L_2})}$$

→ Wenn eine oder beide Induktivität(en) nur flussgesteuert sind, dann muss man mit den Beschreibungen, bspw. $i_{L_1} = f_1^{-1}(\Phi_{L_1})$ usw. arbeiten (siehe Skript).

→ Wenn die Induktivitäten linear sind:

$$\dot{i}_{L_1} = \frac{-1}{L_1} r_1(i_{L_1}, i_{L_2}), \quad \dot{i}_{L_2} = \frac{-1}{L_2} r_2(i_{L_1}, i_{L_2})$$

→ Ohne die Schaltung wie oben in ein resistives Zweitor und zwei Reaktanzen zu zerlegen, kann man auch die Zustandsbeschreibung direkt „by inspection" bestimmen. Dafür soll man wie immer KCL & KVL und Bauelementegleichungen geeignet nutzen, ungewünschte Größen eliminieren und auf die Zustandsgleichungen kommen. Ein Beispiel dazu kann man im Skript finden.

• Systematische qualitative Analyse

→ Normalerweise ist die Berechnung der exakten Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen bis auf einige Spezialfälle unmöglich. Daher bedient man sich in der Praxis für nichtlineare Schaltungen an numerischen Verfahren (siehe Mathe 4) mithilfe eines Computers (z.B. MATLAB-Software dient dazu). Ohne die exakte Lösung zu berechnen, kann man analytisch qualitative Aussagen über nichtlineare Systeme aber treffen. Dazu folgt man folgende Schritte:

1) <u>1.1</u>: Zustandsgrößen nach der obigen Vorschrift bestimmen.
<u>1.2</u>: Die Zustandsbeschreibungen (DGLen) wie oben bestimmen. Dabei KCL, KVL und Bauelementegleichungen aufstellen, geeignet umformen. Eine nichtlineare Kennlinie kann dabei in Form von $i_F = g(u_F)$ usw. vorkommen. Wegen Nichtlinearität kriegt man i.A. keine Matrix $\underline{A}$.

2) Gleichgewichtszustände bestimmen, wobei wegen Nichtlinearität i.A. <u>mehr als ein GGP</u> vorkommt.

→ Bei GGPe gilt definitionsgemäß (Zustandsgröße ändert sich nicht, bleibt konstant):

$\dot{\underline{x}}\big|_{\underline{x}=\underline{p}} = \underline{f}(\underline{p}) \overset{!}{=} \underline{0}$, wobei $\underline{p}$ der GGP ist.

→ Es gibt zwei Möglichkeiten um GGPe zu bestimmen:

a) Aus der Zustandsbeschreibung durch Nullsetzen: $f_1(x_1,x_2)\overset{!}{=}0$ und $f_2(x_1,x_2)\overset{!}{=}0$ (gleichzeitig) und anschließend $x_1=p_1$, $x_2=p_2$ durch Auflösen bestimmen.

b) Direkt aus der Schaltung

→ Im Gleichgewichtszustand kann man <u>Kapazitäten durch Leerlauf</u> und <u>Induktivitäten durch Kurzschluss</u> ersetzen. Dann kann man den entsprechenden Kurzschlussstrom i_L, bzw. die Leerlaufspannung u_C mithilfe KCL, KVL, Bauelementegleichungen bestimmen, die den Koordinaten der GGPe entsprechen.

3) Gleichgewichtszustände durch Linearisierung in GGPe klassifizieren

<u>3.1</u>: An allen Gleichgewichtspunkte $\underline{p}_i$ die Jacobi-Matrix $\underset{\sim}{J}_i = \underset{\sim}{J}(\underline{p}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{bmatrix}\Bigg|_{\underline{x}=\underline{p}_i}$ bestimmen.

⇒ Linearisierte Beschreibung in demjenigen GGP lautet: $\Delta\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{J}_i \cdot \Delta\underline{x}$

<u>3.2</u>: Das Phasenportrait der nichtlinearen Schaltung um die einzelnen GGPe mittels Satzes von Hartmann klassifizieren.

• <u>Satz von Hartmann:</u> Wenn in einem GGP $\underline{p}$, die Jacobi-Matrix $\underset{\sim}{J}(\underline{p})$ die Eigenwerte $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ (bei den Schaltungen zweiten Grades: λ_1,λ_2) hat, <u>für die $Re\{\lambda_i\}\neq 0$ gilt</u>, dann verhält sich das nichtlineare System in der Umgebung von $\underline{p}$ <u>qualitativ genauso</u> wie ein lineares System mit $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{J}(\underline{p})$.

⇒ Jacobi-Matrix wie $\underset{\sim}{A}$ bei normalen linearen Systemen betrachten, Eigenwerte & Eigenvektoren bilden und dadurch Phasenportrait um $\underline{p}$ bestimmen.

→ Wenn $Re\{\lambda_i\}\neq 0\ \forall \lambda_i$ nicht erfüllt ist, dann kann Satz von Hartmann nicht benutzt werden.

→ Ein einfacher Fall ist stückweise lineare Systeme. Bei solchen soll man Jacobi-Matrizen gar nicht berechnen, da in jedem linearen Bereich das System als linear betrachtet werden darf und mit Methoden für lineare Systeme analysiert werden kann (siehe Skript für ein Beispiel).

4) Phasenportrait in x_1-x_2-Ebene skizzieren (da bei nichtlinearen Systemen keine Transformation auf Normalform durchgeführt wird, arbeitet man <u>nicht</u> in ξ-Ebene)

<u>4.1</u>: Gleichgewichtspunkte $\underline{p}_i$ einzeichnen

<u>4.2</u>: Eigenvektoren an GGPe zeichnen, die für die Phasenportraits wie bei linearen Systemen die beiden Achsen sind (verzerrte Koordinatensysteme).

<u>4.3</u>: Die lokalen Phasenportraits an jedem einzelnen GGP skizzieren.

<u>4.4</u>: Weitere, die einzelnen lokalen Phasenportraits möglichst glatt verbindende Trajektorien einzeichnen.

opt (<u>4.5</u>: Isoklinen $m\to\infty$, ($=: f_1(x_1,x_2)=0$) und $m=0$ ($=: f_2(x_1,x_2)=0$) einzeichnen)

→ Da mit dem Satz von Hartmann schon $Re\{\lambda_i\}\neq 0\ \forall \lambda_i$ vorausgesetzt wird, können bei nichtlinearen Systemen (die in ST2 betrachtet werden) nur Sattelpunkte, Knoten und Strudeln vorkommen.