Zusammenfassung – Kapitel 14 – Konservative Schaltungen

→ Definition: Ein dynamisches System ist konservativ, wenn über seinem Zustandsraum (x_1-x_2-Ebene) eine lokal nichtkonstante, stetige, skalare Energiefunktion $E(x)$ existiert, deren Wert auf jeder Trajektorie konstant ist.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 = 0$$

gültig auch für mehrdimensionale Systeme

$$\rightarrow \text{mit } \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E}{\partial x_1}\cdot f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2}\cdot f_2 = 0 \Leftrightarrow (\text{grad}E)^T\cdot f = 0}$$

für Sch. n-ten Grades

$$\text{grad}E = \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial E}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial E}{\partial x_n}$$

→ Wenn eine Schaltung konservativ ist, dann sind alle Fixpunkte (GGPs) und Trajektorien weder stabil noch instabil. Das System zeigt ein indifferentes Verhalten.
⇒ Also laufen die Trajektorien in dem Phasenportrait weder in den Gleichgewichtspunkt rein, noch aus diesem raus. Deswegen sind Wirbelpunkte und Sattelpunkte die einzigen Möglichkeiten für den Typ des GGPs.

→ Mithilfe der Energiefunktion $E(x)$, die man durch die Betrachtung der Bauelemente in der Schaltung (bspw. Energie an Kapazität $E_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$, an Induktivität $E_L = \frac{1}{2}L\cdot u_L^2$ usw.) aufstellen kann, kann man zahlreiche Aussagen über die Lösung des Systems treffen. Da die Bestimmung der exakten Lösung vor allem für nichtlineare Systeme i.A. nicht möglich ist, ist dieses Verfahren ganz nützlich. Man kann die Form der Trajektorien, Amplituden der Zustandsgrößen, Periodendauer eines Umlaufs einer Trajektorie mithilfe $E(x)$ bestimmen. Es sei aber angemerkt, dass die Konservativität dabei angegeben werden soll.

→ Jede verlustlose Schaltung, die also nur aus verlustlosen Elementen besteht, ist konservativ, da $P(x) = \dot{E}(x) = 0$ per Definition gelten soll, also wegen Energieerhaltungssatz der Physik.

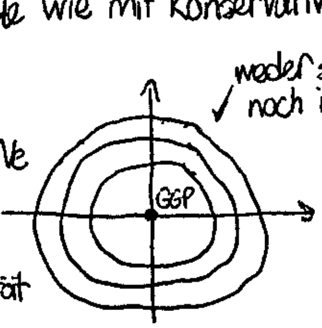
→ Die Umkehrung dieser Aussage gilt aber nicht, da es auch konservative nichtlineare Schaltungen gibt, bei denen verlustbehaftete Elemente vorhanden sind, die aktiv oder passiv sind und elektrische Energie in andere Energieformen umwandeln. Deswegen sind diese Schaltungen nicht verlustlos, aber es existiert immer noch eine Energiefunktion $E(x)$ mit obigen Eigenschaften, daher sind sie trotzdem definitionsgemäß konservativ.

→ Konservativität ist immer eine Konsequenz der Überidealisierung bei der Modellierung. Wenn man also genug detaillierte Modelle konstruiert, dann kann diese Eigenschaft nicht mehr gegeben sein.

→ Ist Satz von Hartmann, da mindestens ein EW den Realteil 0 hat, nicht anwendbar, so kann die Konservativität verwendet werden:
∴ Ein GGP $\underline{p}$ ist genau dann ein Wirbelpunkt, wenn die EWe von Jacobi-Matrix $\underline{\underline{J}}$ rein imaginär sind und das System in einer Umgebung von $\underline{p}$ konservativ ist.

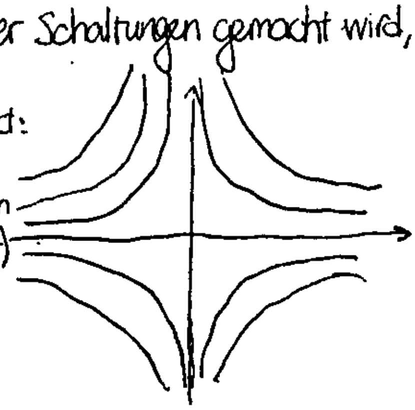
→ Für zwei ausführliche Beispiele wie mit Konservativität Aussagen über Schaltungen gemacht wird, siehe bitte Skript.

• Mögliche GGPe: Wirbelpunkt:
rein imaginäre EWe
⇒ S. v. Hartmann nicht anwendbar.
⟹ mit Konservativität entscheiden.



weder stabil noch instabil

Sattelpunkt:
mit Satz von Hartmann (hier anwendbar) bestimmbar



• Oszillatoren

→ Definition: Oszillatoren sind autonome Schaltungen, deren Trajektorien von einem Anfangszustand $\underline{x} \neq 0$ in eine periodische Schwingung also einer geschlossenen Trajektorie, nämlich dem Grenzzyklus einlaufen.

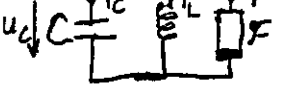
→ Eine stabile Oszillation ist nur bei nichtlinearen Systemen möglich, wobei dann, wenn ein stabiler Grenzzyklus, zu den andere Trajektorien sich asymptotisch nähern, existiert. Dieser Zyklus ist i.A. nicht exakt aber nur numerisch berechenbar.

→ Bei dem Spezialfall autonomer dynamischer Systemen 2. Grades, die einen einzigen GGP $\underline{q}$ besitzen, der instabil ist und die Trajektorien in einer Umgebung von $\underline{q}$ für alle Anfangswerte beschränkt sind, haben mindestens einen stabilen Grenzzyklus.

↳ Wichtiger und nützlicher Spezialfall, da in ST2 nichtlineare Schaltungen 2. Grades betrachtet werden.

- Van der Pol Oszillator:

→ Oszillator aus einem verlustbehafteten Schwingkreis und einem kubischen bereichsweise negativen Widerstand.

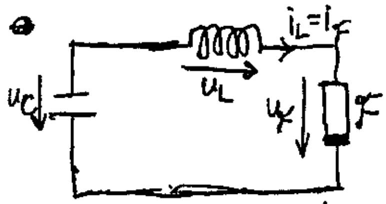


$i_F = g_F(u_C) = \frac{-u_C}{R} + a(u_C)^3$

Zustandsgleichungen: $\dot{u}_C = -\frac{1}{C}(g_F(u_C) + i_L)$, $\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_C$ $\Rightarrow \underline{q} = (0,0)$ instabil.

- Stückweise lineare Oszillatoren

→ nichtlineares Element hat eine stückweise lineare Kennlinie.



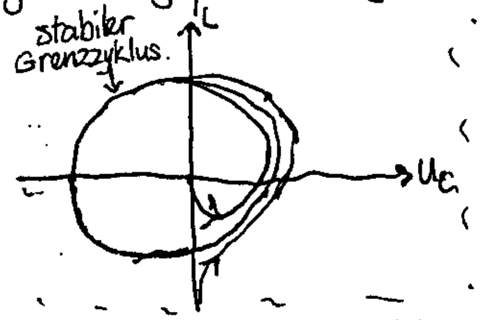
→ Abhängig von den Bauelementenwerten unterscheidet man zwischen zwei Extremfälle:

- Quasilinearer Oszillator hat eine fast harmonische Schwingungsform.
- Relaxationsoszillator hat einen quasi trapezförmigen Grenzzyklus.

Zustandsgleichungen: $\dot{u}_C = -\frac{1}{C} i_L$, $\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_C - \frac{1}{L} r_F(i_L)$

→ Bei der Analyse soll je nachdem wie die stückweise lineare Kennlinie von F ausschaut, einige Bereiche unterschieden werden (für alle lineare Äste). Dann sind die Zustandsbeschreibungen in einzelnen Bereichen mittels Jacobi-Matrizen zu linearisieren, GGPs zu bestimmen, EW zu berechnen und GGPs zu charakterisieren (siehe Skript und letzte Zusammenfassung).

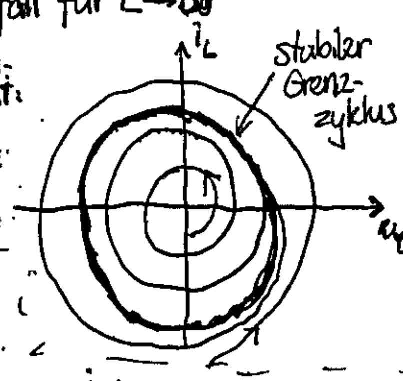
→ In einem Fall, der weder zum ersten noch zum zweiten Extremfall also $L \to \infty$, bzw. $L \to 0$ gehört, ergibt sich das typische Phasenportrait des stückweise linearen Oszillators:



→ Fast harmonische Oszillation ist der Extremfall für $L \to \infty$

- Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Grenzzyklus ist fast kreisförmig:

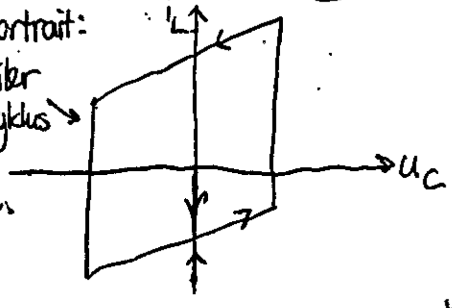
→ Phasenportrait:



→ Relaxationsoszillation tritt beim Extremfall für $L \to 0$ auf.

- Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{\pi}{\ln 3} \cdot \frac{1}{RC}$
- Zweite Zustandsgleichung wird zu $\dot{i}_L = \infty \Rightarrow i_L$ ändert sich sprungförmig für $u_C \neq r_F(i_L)$.
- Diese Analyse begründet auch das Zustandekommen der Sprungphänomene.

→ Phasenportrait:



→ Für ausführlichere Herleitungen siehe bitte Skriptum.