MUSTERLÖSUNG 10

Aufgabe 1: a) In dieser Aufgabe geht es um ein Indiumantimonid (InSb)-Halbleiter, der zur Herstellung von Infrarot-Detektoren verwendet wird. Infrarot-Detektoren funktionieren dadurch, dass das Licht, oder in diesem Fall infrarote Strahlung von dem Halbleiter absorbiert wird und dann diese Absorption gemessen wird. Wenn das Licht, d.h. die Photonen mit einer Energie $E=h\cdot f$ auf den Halbleiter fallen, dann kann diese Energie ein Elektron aus dem Valenzband ins Leitungsband anregen und damit ein Elektron-Loch-Paar generieren. Dieser Prozess ist genau die Absorption. Da in der Natur alles im energetisch günstigsten Zustand bleiben will, möchten dann die Elektronen mit den Löchern rekombinieren und damit wieder ins Valenzband zurückkommen. Diese Rekombination geschieht strahlend oder manchmal auch nicht strahlend, wobei bei strahlender Rekombination Photon vom Halbleiter emittiert wird. So baut man Lasers. Bei Detektoren will man i.d.R. diese Rekombination nicht, da man die Absorption messen möchte. Deshalb legt man meistens ein externes elektrisches Feld an, das nach der Absorption, das Elektron und Loch sofort trennt und hin zu den Elektroden (Anode und Kathode) beschleunigt, an den ein Strom gemessen wird, der ein Maß für die Absorption ist.

Wie oben erklärt, spielt bei Infrarot-Detektoren die sogenannte optische Anregung damit eine große Rolle. Sie ist einfach das Anheben eines Elektrons aus dem Valenz- ins Leitungsband, also die Absorption, wobei die dazu benötigte Energie optisch, d.h. mittels eines Photons zur Verfügung gestellt wird.

Damit die optische Anregung überhaupt möglich ist, müssen die Photonen genug Energie und dementsprechend eine genug kleine Wellenlänge $(E\sim\frac{1}{\lambda})$ haben, da sonst die Elektronen die Bandlücke E_g nicht überwinden können. Es muss also $E_{Ph}\geq E_g$ gelten, damit die optische Anregung stattfinden kann. Also ist die maximal mögliche, von InSb-Halbleiter nachweisbare Wellenlänge λ_{max} (eng. cut-off wavelength) durch den Bandabstand E_g begrenzt und kann wie folgt berechnet werden:

$$E_g=E_{min}=h\,f_{max}\underset{\uparrow\, c=f\cdot\lambda}{=}\frac{h\cdot c}{\lambda_{max}}\Leftrightarrow\boxed{\lambda_{max}=\frac{h\cdot c}{E_g}}=\frac{6{,}62\cdot10^{-34}\,Js\cdot3\cdot10^{8}\,\frac{m}{s}}{0{,}172\,eV\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,As}\approx7{,}21\cdot10^{-6}\,m=\boxed{7{,}21\,\mu m}$$

→ Damit Infrarot detektiert wird, soll der Detektor große λ detektieren können, d.h. muss relativ kleine E_g haben, was bei InSb mit $E_g=0{,}172\,eV$ (Si hat bspw. 1,1eV) der Fall ist.

→ Anmerkung: 7,21µm liegt im mittleren Infrarotbereich. Damit ist InSb für ein Infrarot-Detektor tatsächlich geeignet.

b) Da die intrinsischen Trägerdichten bei Halbleitern relativ gering sind, dotiert man diese mit Fremdatomen um die Trägerdichten gezielt einzustellen. In diesem Fall soll bei dem InSb-Halbleiter durch Dotierung das Verhältnis 30:1 zwischen Löcher- und Elektronendichte erreicht werden. Also muss $\frac{p}{n}=30$ gelten. Da dabei $p>n$ gilt, muss p, d.h. die Löcherdichte vergrößert werden. Deshalb ist die Art der benötigten Dotierung p-Dotierung. Bei dieser Art von Dotierung baut man sogenannte Elektronenakzeptoren in den Halbleiter ein, die Fremdatome mit einem Valenzelektron weniger als den Halbleiter sind. Wegen des Fehlens eines Valenzelektrons, fehlt mit einem Nachbar-halbleiteratom eine kovalente Bindung, diese Stelle ist eine positiv geladene Lücke. In diese Lücke kann ein Elektron von anderen Atomen wandern, dann ist aber der ursprüngliche Platz des wandernden Elektrons positiv geladen. Diese positive Ladung heißt Loch. Durch p-Dotierung können deshalb Löcher generiert werden.

Da es für den Zweck das Verhältnis $p:n=30:1$ zu erreichen, keinen Sinn macht, Donatoren zu verwenden ist die Donatordichte $N_D=0$. Außerdem gilt laut der Angabe $N_A\approx N_A^-$, da die gesamte Dotierung als ionisiert angenommen wird, was für die Raumtemperatur $T=300K$, bei der so ein Detektor üblicherweise betrieben wird, mehr oder weniger gültig ist.

Um $N_A=N_A^-$ zu berechnen, kann man nun die Ladungsneutralitätsbedingung für dotierte Halbleiter benutzen, die folgendermaßen lautet:

$$n+N_A^-=p+N_D^+\xrightarrow[N_A=N_A^-]{N_D=N_D^+=0}n+N_A=p$$

Da wir das Verhältnis $\frac{p}{n}=30$ erreichen möchten, setzen wir auch $p=30n$ ein:

$$n+N_A=30n\Rightarrow N_A=29n$$

Nun bleibt nur noch n, die letzte Unbekannte zu eliminieren um N_A zu bestimmen. Dafür kann man die folgende Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichts (wenn nicht anders gegeben, geht man davon aus, dass der Halbleiter im thermodynamischen Gleichgewicht ist) benutzen, die unabhängig von der Dotierung gilt:

$$n \cdot p = n_i \cdot p_i \underset{n_i = p_i}{=} n_i^2 = p_i^2$$

Dadurch kann man n in Abhängigkeit der bekannten Größe n_i ausdrucken:

$$n \cdot p = n \cdot 30n = 30n^2 = n_i^2 \Longrightarrow n^2 = \frac{n_i^2}{30} \Rightarrow n = \frac{\pm n_i}{\sqrt{30}} \Longrightarrow n = \frac{n_i}{\sqrt{30}}$$

negative n
nicht sinnvoll

Setzt man diesen in den obigen Ausdruck ein, so kann man mit $n_i = 2{,}04 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}$ für InSb aus der Angabe N_A berechnen:

$$N_A = 29n = 29 \cdot \frac{n_i}{\sqrt{30}} = \frac{29}{\sqrt{30}} \cdot 2{,}04 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3} = \underline{1{,}08 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}}$$

c) Um das Verhältnis von Löchern und Elektronen $\left(\frac{p}{n}\right)$ in dem wie in Teilaufgabe b) dotierten InSb-Halbleiter für $T = 400\,\mathrm{K}$ berechnen zu können, kann man wieder die Ladungsneutralitätbedingung und die Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichts nutzen. Dabei soll man aber darauf achten, dass viele Größen sich wegen ihrer Temperaturabhängigkeit mit dieser Erhöhung der Temperatur ändern. Die Ladungsneutralität lautet wegen $N_D \approx 0$ und der Annahme der vollständigen Ionisierung $(N_A \approx N_A^-)$, die wegen der Erhöhung der Temperatur immer noch gilt:

(Störstellenerschöpfung)

$$n + N_A = p$$

Außerdem gilt es wieder $n_i^2 = n \cdot p$, wobei n_i jetzt einen anderen Wert hat. Außerdem bleibt $N_A^- = 1{,}08 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$ konstant, da schon bei 300K alle Akzeptoren ionisiert waren und damit durch Erwärmung N_A^- sich nicht ändert (wenn T steigt, werden mehrere Akzeptoren ionisiert, falls solche vorhanden sind). Damit gilt es $n = \frac{n_i^2}{p}$ und:

$$\frac{n_i^2}{p} + N_A = p \overset{\cdot p}{\Longleftrightarrow} p^2 = N_A p + n_i^2 \Leftrightarrow p^2 - N_A p - n_i^2 = 0 \Rightarrow p_{1/2} = \frac{N_A \pm \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2} \Rightarrow p_1 = \frac{N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2},\ p_2 = \frac{N_A - \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2}$$

Da $\sqrt{N_A^2 + 4n_i^2} > N_A$ gilt, ist p_2 negativ und damit keine gültige Lösung, weil negative Trägerdichten keinen Sinn machen. Damit ist p_1 als die Löcherdichte p zu verwenden:

$$p = \frac{N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2}$$

Wenn man p hat, dann kann n über $n = \frac{n_i^2}{p}$ berechnet und damit das gesuchte Verhältnis $\frac{p}{n}$ bestimmt werden. Außerdem ist N_A wie oben diskutiert schon bekannt, deshalb soll man nur noch n_i berechnen. Die intrinsische Trägerdichte berechnet man wie üblich mit folgender Formel:

$$n_i = \sqrt{N_L^* N_V^*} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad \text{mit } N_L^* = 2M_L \left[\frac{m_n^* k_B T}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2} \text{ und } N_V^* = 2\left[\frac{m_p^* k_B T}{2\pi\hbar^2}\right]^{3/2}$$

Wie man an dieser Formel leicht merken kann ist n_i und dabei auch N_L^*, N_V^* temperaturabhängig. Um nun $n_i(400\mathrm{K})$ zu berechnen, kann man die Definitionen von N_L^* und N_V^* nicht nutzen, da m_p^* nicht bekannt ist. Falls es bekannt wäre, wäre eine solche Berechnung durch das Einsetzen aller Werte zwar möglich, aber viel zu aufwendig. Stattdessen kann man $\sqrt{N_L^* N_V^*}$ für 300K berechnen, da $E_g(300\mathrm{K})$ und $n_i(300\mathrm{K})$ bekannt sind, und dann ein Quotient von $\sqrt{N_L^* N_V^*}$ für 400K und 300K bilden, wobei außer T alle Größen wegfallen:

$$n_i(300\mathrm{K}) = \sqrt{N_L^* N_V^*}_{(300\mathrm{K})} \cdot e^{-\frac{E_g(300\mathrm{K})}{2k_B 300\mathrm{K}}} \Longrightarrow \sqrt{N_L^* N_V^*}_{(300\mathrm{K})} = \frac{n_i(300\mathrm{K})}{e^{-\frac{E_g(300\mathrm{K})}{2k_B 300\mathrm{K}}}} = \frac{2{,}04 \cdot 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-3}}{e^{-\frac{0{,}172\,\mathrm{eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}}{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 300\mathrm{K}}}} \approx 5{,}67 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

das ist keine Multiplikation!

$$\frac{\sqrt{N_L^* N_V^*}_{(400\mathrm{K})}}{\sqrt{N_L^* N_V^*}_{(300\mathrm{K})}} = \frac{\cancel{\sqrt{4M_L}}\left[\frac{\cancel{m_n^* m_p^* k_B^2}(400\mathrm{K})^2}{\cancel{4\pi^2\hbar^4}}\right]^{3/4}}{\cancel{\sqrt{4M_L}}\left[\frac{\cancel{m_n^* m_p^* k_B^2}(300\mathrm{K})^2}{\cancel{4\pi^2\hbar^4}}\right]^{3/4}} = \frac{(400\mathrm{K})^{3/2}}{(300\mathrm{K})^{3/2}} \Longrightarrow \sqrt{N_L^* N_V^*}_{(400\mathrm{K})} = \left(\frac{400\mathrm{K}}{300\mathrm{K}}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{N_L^* N_V^*}_{(300\mathrm{K})} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3} \approx 8{,}73 \cdot 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

4 wegen Wurzel

Damit gilt für $n_i(400\mathrm{K})$, die wir suchen, um $\frac{p}{n}_{(400\mathrm{K})}$ berechnen zu können:

$$n_i(400\mathrm{K}) = \sqrt{N_L^* N_V^*}_{(400\mathrm{K})} \cdot e^{-\frac{E_g(400\mathrm{K})}{2k_B 400\mathrm{K}}}$$

Da die Bandlücke E_g auch temperaturabhängig ist, soll nun $E_g(400K)$ berechnet werden, um $n_i(400K)$ bestimmen zu können.
Dafür nutze man die angegebene Formel für $E_g(T)$. Damit gilt für E_g bei 400K:

$$E_g(400K)=E_g(T=0)-\frac{\alpha(400K)^2}{400K+\beta} \quad \text{mit } \alpha=0{,}32\tfrac{meV}{K},\ \beta=170K \text{ (laut Angabe)}$$

Dabei ist $E_g(T=0)$ unbekannt, die aber mit dem Kenntnis $E_g(300K)=0{,}172eV$ wie folgt bestimmt werden kann:

$$E_g(300K)=E_g(T=0)-\frac{\alpha\cdot(300K)^2}{300K+\beta} \Leftrightarrow E_g(T=0)=E_g(300K)+\frac{\alpha(300K)^2}{300K+\beta}=0{,}172eV+\frac{0{,}32\frac{meV}{K}\cdot(300K)^2}{300K+170K}\approx 0{,}233eV$$

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so ergibt sich:

$$E_g(400K)=0{,}233eV-\frac{0{,}32\frac{meV}{K}(400K)^2}{400K+170K}=0{,}143eV$$

Und nun kann man $n_i(400K)$ bestimmen:

$$n_i(400K)=\sqrt{N_L^* N_V^*}_{(400K)}\cdot e^{-\frac{E_g(400K)}{2k_B 400K}}=8{,}73\cdot10^{17}cm^{-3}\cdot e^{-\frac{0{,}143eV\cdot1{,}6\cdot10^{-19}As}{2\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\frac{J}{K}\cdot400K}}\approx1{,}09\cdot10^{17}cm^{-3}$$

Damit gilt für die Löcherdichte p mit der vorher bestimmten Formel:

$$p=\frac{N_A+\sqrt{N_A^2+4n_i^2}}{2}=\frac{1{,}08\cdot10^{17}cm^{-3}+\sqrt{(1{,}08\cdot10^{17}cm^{-3})^2+4\cdot(1{,}09\cdot10^{17}cm^{-3})^2}}{2}\approx1{,}76\cdot10^{17}cm^{-3}$$

Mit $n=\frac{n_i^2}{p}$ folgt nun für n: $\quad n=\frac{(1{,}09\cdot10^{17}cm^{-3})^2}{1{,}76\cdot10^{17}cm^{-3}}\approx6{,}75\cdot10^{16}cm^{-3}$

Für das gesuchte Verhältnis bei T=400K gilt damit:

$$\boxed{\frac{p}{n}=\frac{1{,}76\cdot10^{17}cm^{-3}}{6{,}75\cdot10^{16}cm^{-3}}\approx2{,}6}$$

→Anmerkung: Bei T=400K kann man merken, dass die intrinsische Trägerdichte n_i die Dotierungsdichte N_A erreicht hat. Schon bei T=400K ist der InSb-Halbleiter im intrinsischen Bereich, d.h. die intrinsische Trägerdichte wird zu der entscheidenden Größe bei der Bestimmung von Trägerdichten n und p, der Halbleiter zeigt intrinsisches Verhalten. Dabei verliert die Dotierung ihre Rolle, was man daran merkt, dass das gezielt eingestellte Verhältnis $\frac{p}{n}=30$ bei 300K gar nicht mehr stimmt, sondern fast das Verhältnis beim intrinsischen Halbleiter $\frac{p}{n}=1$ erreicht wird.