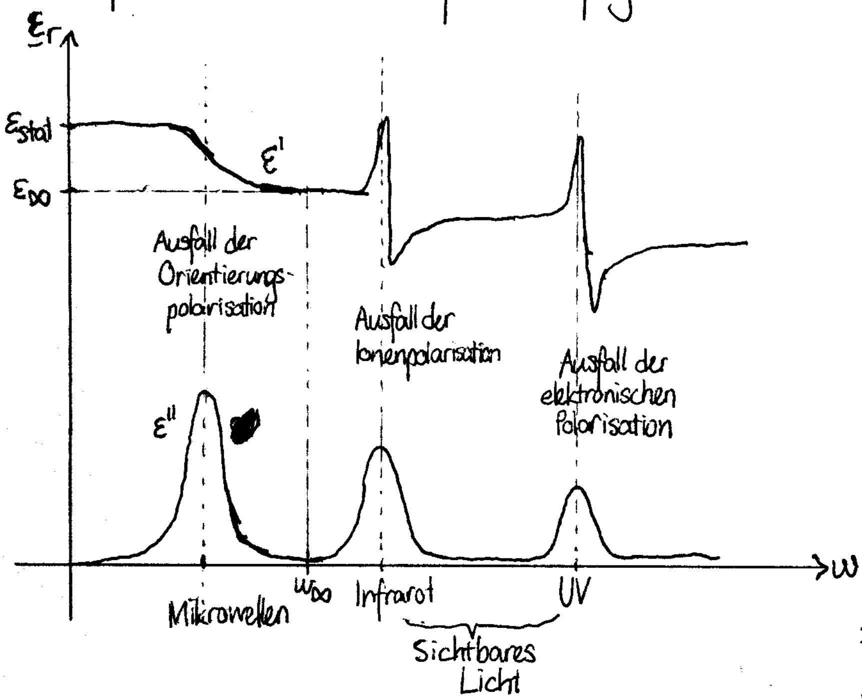
MUSTERLÖSUNG 12

Zu den Festkörpern ordnet man eine komplexe relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = \varepsilon' - j\varepsilon''$. Diese Zahl hängt mit der Polarisation des Körpers zusammen und deshalb von der Existenz der drei Polarisationsmechanismen (elektronische Polarisation, Ionenpolarisation und Orientierungspolarisation) in diesem Körper ab. Bei niedrigen Frequenzen ω des angelegten externen elektrischen Feldes, das die Polarisation verursacht, kann man davon ausgehen, dass ε_r nahezu konstant ist. Im Allgemeinen gilt das jedoch nicht und ε_r weist eine Frequenzabhängigkeit auf. Die obige Definition lautet deshalb eigentlich $\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$. Dabei beschreibt der (negative von) Imaginärteil die Verluste, da dieser Imaginärteil ε'' im Realteil der elektrischen Stromdichte $\vec{J}$, die von dem angelegten elektrischen Feld verursacht wird, sich befindet:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{D}}{dt} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon'\vec{E} + j\omega\varepsilon_0(-j\varepsilon'')\vec{E} \underset{j\cdot(-j)=1}{=} j\omega\varepsilon_0\varepsilon'\vec{E} + \omega\varepsilon_0\varepsilon''\vec{E}.$$

Weil der Realteil der Stromdichte die Verluste verursacht, beschreibt ε'' die Verluste.

a) In dieser Teilaufgabe soll der Frequenzgang des Real- und Imaginärteils, $\varepsilon'(\omega)$ und $\varepsilon''(\omega)$, der relativen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r(\omega)$ skizziert werden. Dabei soll man von einem Festkörper ausgehen, bei dem alle drei Polarisationsmechanismen betrachtet werden. Die Frequenzabhängigkeit von ε' und ε'' sieht für einen solchen Körper wie folgt aus:



→ Nun sollen diese Kurven erläutert werden. Der Realteil ε' beschreibt die Polarisation des Mediums. Unter einem elektrischen Feld, bei niedrigen Frequenzen sind alle drei Polarisationsarten vorhanden, d.h. die permanenten Dipole werden in Richtung des E-Feldes (teilweise) ausgerichtet und damit ist die Orientierungspolarisation vorhanden, die Ionen werden durch das E-Feld verschoben und damit ist die Ionenpolarisation vorhanden, und die Elektronenhüllen werden gegenüber die Atomkerne verschoben und dadurch ist die elektronische Polarisation vorhanden. Alle dieser Polarisationstypen werden zu der Gesamtpolarisation zusammengezählt, die von der statischen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon' = \varepsilon_{stat}$ beschrieben wird. Erhöht man die Frequenz so können die permanenten Dipole ab der sogenannten Dipolrelaxationsfrequenz, die im Mikrowellenbereich liegt, das E-Feld nicht mehr folgen, die Orientierungspolarisation fällt aus, ε' besteht nun aus den Beiträgen von Ionenpolarisation und elektronischer Polarisation. Erhöht man ω weiter, so können erstmal die Ionen und anschließend die Elektronenhüllen das alternierende E-Feld nicht mehr folgen. Die Ionenpolarisation und die elektronische Polarisation fallen jeweils bei ihren Resonanzfrequenzen, die im Infrarot- bzw. UV-Bereich sind, aus.

Große Verluste treten dabei bei Ausfallen auf, d.h. ε'' ist nur bei den beiden Resonanzfrequenzen und bei der Dipolrelaxationsfrequenz wesentlich von Null verschieden.

Für die Grenzfälle gelten also $\lim\limits_{\omega\to 0}\varepsilon' = \varepsilon(0) = \varepsilon_{stat}$ und $\lim\limits_{\omega\to\infty}\varepsilon' = 1$.

Außerdem bezeichnet ω_∞ die größte technisch relevante Frequenz. Es gilt $\omega_\infty = 100\,\text{GHz} = 10^{11}\,\text{Hz}$ und $\varepsilon'(\omega_\infty) = \varepsilon_\infty$. Deshalb sind bei technisch relevanten Frequenzen $\omega < \omega_\infty$ i.d.R. alle Polarisationstypen vorhanden. Weil Orientierungspolarisation einen viel größeren Beitrag zur Gesamtpolarisation als die beiden anderen Mechanismen liefert, dominiert sie bei technisch relevanten Frequenzen und die Dipolrelaxation bestimmt das Frequenzverhalten.

b) Im Rahmen dieser Teilaufgabe sollen für Polycarbonat ε_∞ und die Relaxationszeit τ für die Orientierungspolarisation berechnet werden. Dafür sind die statische relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon'(0)=\varepsilon_{stat}=3{,}05$ und der Maximalwert des Verlustfaktors, der als $\tan\delta=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ definiert ist, als $\tan\delta=0{,}012$ gegeben. Dieses Maximum wird laut Angabe bei der Frequenz $f=10^7\,\text{Hz}$ ($\Rightarrow \omega=2\pi f=2\pi\, 10^7\,\text{Hz}$) erreicht. Da diese Frequenz kleiner als die maximale technisch relevante Frequenz $\omega_\infty=100\,\text{GHz}$ ist, kann man von der Existenz aller drei Polarisationsmechanismen ausgehen und die folgenden Formeln für $\varepsilon'(\omega)$ und $\varepsilon''(\omega)$ aus dem Skript anwenden.

$$\varepsilon'(\omega)=\varepsilon_\infty+\frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}\quad,\ \varepsilon''(\omega)=\frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}\omega\tau$$

Nun ist die Idee, die Ableitung von $\tan\delta$ nach ω zu Null gleichzusetzen, wobei die Ableitung bei $\omega=2\pi\, 10^7\,\text{Hz}$ ausgewertet wird. Diese Gleichung gilt, da bei $f=10^7\,\text{Hz}$ sich das Maximum von $\tan\delta$ befindet und eine notwendige Bedingung um ein Maximum zu sein, das Verschwinden der Ableitung ist. Aus dieser Gleichung kann man dann ε_∞ und τ bestimmen. Dazu drücke man $\tan\delta=\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ mithilfe der obigen Definitionen aus:

$$\tan\delta=\frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}=\frac{\frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}\omega\tau}{\varepsilon_\infty+\frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}}=\frac{\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}}{\frac{\varepsilon_\infty(1+\omega^2\tau^2)+\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}}=\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau\cancel{(1+\omega^2\tau^2)}}{[\varepsilon_\infty(1+\omega^2\tau^2)+\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty]\cancel{(1+\omega^2\tau^2)}}=\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_\infty(1+\omega^2\tau^2)+\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}$$

$$=\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\cancel{\varepsilon_\infty}+\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}\cancel{-\varepsilon_\infty}}=\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}}$$

Jetzt kann die oben erwähnte Gleichung $\frac{d}{d\omega}\tan\delta\overset{!}{=}0$ genutzt werden. Dazu soll die Ableitung berechnet werden:

$$\frac{d}{d\omega}\tan\delta=\frac{d}{d\omega}\left[\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}}\right]$$

Dabei muss die Quotientenregel für Ableitung angewendet werden, die wie folgt ausschaut:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\implies\frac{d}{dx}f(x)=\frac{\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\cdot h(x)-g(x)\left(\frac{d}{dx}h(x)\right)}{(h(x))^2}$$

Das heißt, man soll den Nenner quadriert wieder in den Nenner schreiben und beim Zähler, die Ableitung des Zählers mit dem Nenner multiplizieren und davon das Produkt von dem Zähler und der Ableitung des Nenners subtrahieren.

Mittels eines Vergleichs mit dem obigen Bruch schreibt man:

Zähler: $g(\omega)=(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau\Rightarrow\frac{d}{d\omega}g(\omega)=(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\tau$, Nenner: $h(\omega)=\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}\Rightarrow\frac{d}{d\omega}h(\omega)=2\varepsilon_\infty\omega\tau^2$ (Die Variable ist hier ω statt x.)

Damit gilt:

$$\frac{d}{d\omega}\tan\delta=\frac{d}{d\omega}\left[\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}}\right]=\frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\tau(\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat})-(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau\cdot2\varepsilon_\infty\omega\tau^2}{(\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat})^2}\overset{!}{=}0$$

Diese Gleichung gilt nur dann, wenn der Zähler des letzten Bruchs zu Null wird. Damit gilt:

$$\Leftrightarrow(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\tau(\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat})-(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\cdot2\varepsilon_\infty\omega^2\tau^3\overset{!}{=}0\Leftrightarrow\cancel{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)}\cancel{\tau}(\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat})=\cancel{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)}2\varepsilon_\infty\omega^2\tau^{\cancel{3}\,2}$$

$$\Leftrightarrow\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2+\varepsilon_{stat}=2\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2\Leftrightarrow\varepsilon_{stat}=2\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2-\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2=\varepsilon_\infty\omega^2\tau^2\Leftrightarrow\omega^2=\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty\tau^2}\Leftrightarrow\omega=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty\tau^2}}$$

Da negative Frequenzen nicht sinnvoll sind, gilt hier die positive Lösung:

$$\omega=\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}}\cdot\frac{1}{\tau}$$

In dieser Gleichung sind $\omega=2\pi\, 10^7\,\text{Hz}$ und ε_{stat} bekannt, aber ε_∞ und τ unbekannt, deshalb braucht man noch eine Gleichung um diese gesuchten Unbekannten ε_∞ und τ bestimmen zu können. Diese Gleichung ist (laut Angabe) $\tan\delta\Big|_{\omega=2\pi\, 10^7\,\text{Hz}}=0{,}012$, und der Ausdruck für $\tan\delta$ wird gerade oben bestimmt. Man kann also diese letzte Gleichung nach einer der Unbekannten z.B. nach τ auflösen und diesen Ausdruck oben einsetzen:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow \tan\delta = \frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_\infty \omega^2 \tau^2 + \varepsilon_{stat}} = \frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\cancel{\omega}\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\cancel{\omega}}}{\varepsilon_\infty \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\omega}\right)^2 \omega^2 + \varepsilon_{stat}} = \frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}}}{\cancel{\varepsilon_\infty}\cancel{\omega^2} \cdot \frac{\varepsilon_{stat}}{\cancel{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\cancel{\omega^2}} + \varepsilon_{stat}} = \frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}}}{\varepsilon_{stat}+\varepsilon_{stat}}$$

$$\Leftrightarrow \tan\delta = \frac{(\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)\sqrt{\varepsilon_{stat}}}{2\varepsilon_{stat}\cdot\sqrt{\varepsilon_\infty}} = \frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{2\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty}} \overset{!}{=} 0{,}012$$

Jetzt kann man aus dieser Gleichung ε_∞ bestimmen, wobei die Mitternachtsformel angewendet wird:

$$\frac{\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty}{2\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty}} = 0{,}012 \Leftrightarrow \varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty = 2\cdot 0{,}012\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty} \Leftrightarrow (\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty) = 0{,}024\sqrt{\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty} \Leftrightarrow (\varepsilon_{stat}-\varepsilon_\infty)^2 = 0{,}024^2\cdot\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_{stat}^2 - 2\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty + \varepsilon_\infty^2 = 0{,}024^2\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty \Leftrightarrow \varepsilon_\infty^2 - 2\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty - 0{,}024^2\varepsilon_{stat}\varepsilon_\infty + \varepsilon_{stat}^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_\infty^2 + (-2\varepsilon_{stat} - 0{,}024^2\varepsilon_{stat})\varepsilon_\infty + \varepsilon_{stat}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\infty_{1,2}} = \frac{2\varepsilon_{stat} + 0{,}024^2\varepsilon_{stat} \pm \sqrt{(2\varepsilon_{stat}+0{,}024^2\varepsilon_{stat})^2 - 4\varepsilon_{stat}^2}}{2}$$

Nun ist die Frage ob das positive oder negative Vorzeichen das richtige Ergebnis liefert. Dazu kann man sich die Skizze aus Teilaufgabe a) anschauen. Da merkt man sofort, dass $\varepsilon_{stat} > \varepsilon_\infty$ gelten muss, was ja logisch ist, da ε_{stat} den Körper mit und ε_∞ ohne Orientierungspolarisation darstellen. Wenn man in der Gleichung das positive Vorzeichen wählt, dann gilt aber offensichtlich $\varepsilon_\infty > \varepsilon_{stat}$, da zu $\frac{2\varepsilon_{stat}}{2} = \varepsilon_{stat}$ andere positive Terme addiert werden. Da diese Lösung der Bedingung $\varepsilon_\infty < \varepsilon_{stat}$ widerspricht, muss das negative Vorzeichen stimmen. Damit gilt für ε_∞:

$$\underline{\underline{\varepsilon_\infty}} = \frac{2\varepsilon_{stat} + 0{,}024^2\varepsilon_{stat} - \sqrt{(2\varepsilon_{stat}+0{,}024^2\varepsilon_{stat})^2 - 4\varepsilon_{stat}^2}}{2} = \frac{2\cdot 3{,}05 + 0{,}024^2\cdot 3{,}05 - \sqrt{(2\cdot 3{,}05 + 0{,}024^2\cdot 3{,}05)^2 - 4(3{,}05)^2}}{2} \approx \underline{\underline{2{,}978}}$$

Letztendlich kann dieser Wert in den obigen Zusammenhang zwischen ε_∞ und τ eingesetzt und damit die Relaxationszeit τ auch berechnet werden:

$1\,\mathrm{Hz} = 1\,\frac{1}{s}$

$$\underline{\underline{\tau}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty}} \cdot \frac{1}{2\pi f} = \sqrt{\frac{3{,}05}{2{,}978}} \cdot \frac{1}{2\pi\cdot 10^7\,\mathrm{Hz}} \approx 1{,}61\cdot 10^{-8}\,s = \underline{\underline{16{,}1\,ns}}$$