MUSTERLÖSUNG 8

A1) In dieser Aufgabe wird die Bandstruktur von (direkten) Halbleitern mithilfe eines vereinfachten allgemeinen Modells untersucht. In diesem Modell liegen sowohl das Maximum des Valenzbands (das Zustand im Valenzband mit maximaler Energie) als auch das Minimum des Leitungsbands beim Wellenvektor $k=0$ und werden mit der Energie E_g, was genau den Bandabstand bezeichnet, getrennt. Die beiden Energiebänder sind parabelförmig, was für Halbleiter lokal (d.h. um ein bestimmtes Minimum oder Maximum eines Bandes) sinnvoll ist, und das Maximum des Valenzbandes wird willkürlich als der Energienullpunkt gewählt. Damit ergibt sich für den energetischen Verlauf des Leitungsbands in Abhängigkeit von k folgendes: $\boxed{E_L(k)=E_g+Ak^2}$

Nun ist die Aufgabe das einzige Unbekannte A in dieser Formel zu bestimmen und damit den Verlauf von $E_L(k)$ für den Halbleiterkristall GaAs (was ein direkter Halbleiter ist und deshalb sinnvoll mit dem gegebenen Modell untersucht werden kann) explizit anzugeben. Für den Halbleiterkristall von GaAs werden die effektive Masse m^* und die Bandlücke E_g gegeben:
$$E_g=1{,}42\,eV\ ,\ m^*=0{,}067m_0$$

Um diese Aufgabe lösen zu können braucht man lediglich eine Gleichung, die A beinhaltet, da A das einzige Unbekannte ist und damit eine Gleichung zu einem eindeutig lösbaren Gleichungssystem führt. Diese Gleichung kriegt man aus der Definition der effektiven Masse m^* in einem Kristall. Die effektive Masse ist eine Größe, die den periodischen Verlauf eines Kristallgitters berücksichtigt. Daher kann man in allen Formeln, die mithilfe der Schrödinger-Gleichung für freie Elektronen hergeleitet werden, die Masse m_0 mit der effektiven Masse m^* ersetzen und dann diese Formeln für die Elektronen im periodischen Kristallgitterpotential anwenden. Die effektive Masse der Elektronen ist mit der Krümmung des energetischen Verlaufs des Leitungsbandes, d.h. mit der zweiten Ableitung von $E_L(k)$ wie folgt verknüpft:
$$m^*=\frac{\hbar^2}{\frac{d^2E_L(k)}{dk^2}}$$

Nun soll man $E_L(k)$ zweimal nach k ableiten:
$$\frac{d^2E_L(k)}{dk^2}=\frac{d}{dk}\left(\frac{d}{dk}E_L(k)\right)=\frac{d}{dk}\left(\frac{d}{dk}(E_g+Ak^2)\right)=\frac{d}{dk}(2Ak)=2A$$

Das kann man jetzt in die Definition der effektiven Masse m^* einsetzen:
$$m^*=\frac{\hbar^2}{2A}$$

Diese ist genau die benötigte Gleichung. Jetzt kann man nach A auflösen, A bestimmen und letztendlich $E_L(k)$ explizit angeben:
$$\Rightarrow A=\frac{\hbar^2}{2m^*}=\frac{\hbar^2}{2\cdot 0{,}067m_0}=\frac{(1{,}054\cdot 10^{-34}\,Js)^2}{2\cdot 0{,}067\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\,kg}\cong 9{,}1\cdot 10^{-38}\,\frac{J^2s^2}{kg}$$

Es steht in der Angabe, dass die Einheit von A als $eVcm^2$ gegeben werden soll, d.h. wir sollen s^2 und kg wegkriegen. Dafür kann man den Zusammenhang Energie = Kraft · Weg = Masse · Beschleunigung · Weg $\Leftrightarrow$ $J=kg\frac{m^2}{s^2}$ benutzen.
$$\Rightarrow A\cong 9{,}1\cdot 10^{-38}\,J\cdot\frac{Js^2}{kg}=9{,}1\cdot 10^{-38}\,J\cdot\frac{\cancel{kg}\frac{m^2}{\cancel{s^2}}\cancel{s^2}}{\cancel{kg}}=9{,}1\cdot 10^{-38}\,Jm^2$$

Nun soll man J in eV mit $1eV=1{,}6\cdot 10^{-19}J$ und m in cm mit $1m=10^2cm$ umrechnen:
$$\Rightarrow A\approx 9{,}1\cdot 10^{-38}\,Jm^2=9{,}1\cdot 10^{-38}\,\frac{eV}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\cdot 10^4\,cm^2\cong 5{,}7\cdot 10^{-15}\,eVcm^2$$

Damit gilt für $E_L(k)$, da $E_g=1{,}42eV$ gilt:
$$\boxed{E_L(k)=1{,}42eV+5{,}7\cdot 10^{-15}\,eVcm^2\cdot k^2}$$

→ Anmerkung: Die obigen Überlegungen gelten analog für die Löcher, die die anderen Ladungsspezies bei den Halbleitern sind.

A2) In dieser Aufgabe wird ein Peltier-Element untersucht, das für die Regelung der Temperatur der gegebenen Anordnung sorgt. Dabei werden zwei Al_2O_3 Keramikschichten mit zwei unterschiedlich dotierten SiGe Blöcke verbunden und die Temperatur der unteren Keramikschicht wird bei 293K konstant gehalten. Bei einem Peltierelement spielen mindestens zwei entgegengerichtete Prozesse eine Rolle. Der eine ist der Peltier-Effekt, was die Benützung eines elektrischen Stroms zum Wärmetransport ist. Der Grund für diesen Peltier-Effekt ist, dass die Elektronen, die den elektrischen Strom verursachen, immer Wärmeenergie mit sich übertragen. Der zweite Prozess ist der Wärmefluß in entgegengesetzter Richtung zur Wärmestromdichte w_{pel} durch den Peltier-Effekt, der durch die Wärmeleitfähigkeit hervorgerufen wird. Der Grund für diese Wärmeleitung ist der Temperaturgradient, der sich zwischen den beiden Keramikschichten bildet. Weitere mögliche Prozesse in einem Peltierelement sind die Eigenerwärmung der Halbleiterblöcken durch den elektrischen Strom und die äußere Wärmezufuhr zu dem System, die hier laut der Annahme der Angabe keine Rolle spielen.

a) Nun sollen wir den ersten Prozess für die gegebene Anordnung betrachten, d.h. wir sollen die Wärmestromdichte w_{pel} des Peltier-Effekts berechnen. Laut der Angabe sollen wir dabei nur die beiden Übergänge zur oberen Keramikschicht betrachten. Die Peltier-Wärmestromdichte ist mit der elektrischen Stromdichte J über die Peltierkonstante Π folgendermaßen verknüpft: $w_{pel} = \Pi \cdot J$

Π ist dabei mit der Thermokraft S eines Materials als $\Pi = S T$ definiert. S ist eine materialspezifische Größe. Für die gegebene Anordnung soll man die n-SiGe → Metall und Metall → pSiGe Übergänge betrachten. Da diese beiden Übergänge an der oberen Keramikschicht mit der Temperatur T_d sind, gelten für die Peltierkonstanten Π_n und Π_p der n-SiGe und p-SiGe Blöcke $\boxed{\Pi_n = S_{n,SiGe} T_d}$ und $\boxed{\Pi_p = S_{p,SiGe} T_d}$ an diesen Übergängen.

Peltier-Elemente werden wie auch hier zur Abkühlung der oberen Keramikschicht verwendet. Das heißt, dass bei dieser Anordnung bei dem Metallkontakt an der oberen Keramikschicht eine Kühlung stattfinden soll. Die an einer Lötstelle (Metall) abgegebene Wärmeenergie berechnet man, indem man die aus der Lötstelle rausfließenden Wärmestromdichte von der in die Lötstelle reinfließenden Wärmestromdichte abzieht, das heißt $w_{pel} = w_{rein} - w_{raus}$ bildet. Um zu entscheiden, was rein- und was rausfließt, soll man die Richtung der technischen Stromdichte J betrachten, d.h. vom Pluspol zum Minuspol. Für eine Abkühlung an der Lötstelle muss dabei $w_{pel} < 0$, d.h. $w_{raus} > w_{rein}$ gewährleistet sein, damit mehr Energie rausfließt, als was reingebracht wird. Da bei einer Lötstelle überall die gleiche Temperatur herrscht, muss wegen $w_{raus} > w_{rein} \Leftrightarrow S_2 T_J > S_1 T_J \Rightarrow S_2 > S_1$ gelten, also das Material nach der Lötstelle muss ein größeres S besitzen, damit gekühlt werden kann, wenn der Strom in gegebener Richtung fließt.
Deswegen passt die gegebene Anordnung zur Kühlung der oberen Keramikschicht ganz gut, da p-SiGe-Block das zweite Element ist (wo raußfließender Strom gibt) und n-SiGe-Block das erste. Und da $S_{p,SiGe} = 0{,}43 \frac{mV}{K} > S_{n,SiGe} = -0{,}45 \frac{mV}{K}$ gilt, findet an dem oberen Metall damit eine Abkühlung statt.

⇒ Aufgrund der obigen Überlegungen (Kühlung am Metall!) gilt für die Peltierwärmestromdichte w_{pel}:

$$w_{pel} = w_{rein} - w_{raus} \underset{\substack{J \text{ fließt von} \\ n \text{ über Metall} \\ \text{zu } p}}{=} \Pi_{n,SiGe} J - \Pi_{p,SiGe} J = (\Pi_{n,SiGe} - \Pi_{p,SiGe}) J \underset{\substack{\Pi = ST \\ T = T_d}}{=} (S_{n,SiGe} T_d - S_{p,SiGe} T_d) J = -(S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe}) T_d J$$

Da die elektrische Stromdichte J durch $J = \frac{I_{max}}{A_{Halbleiter\text{-}Metall}}$ definiert ist gilt: $\boxed{w_{pel} = -(S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe}) T_d \cdot \frac{I_{max}}{A}}$

Damit wird der gesuchte Ansatz für die Wärmestromdichte w_{pel} des Peltiereffekts in Abhängigkeit der bekannten Größen gefunden.

b) Obwohl man immer weiter mit dem Peltier-Effekt dafür sorgen kann, dass Wärme von der Lötstelle abgeführt wird, bildet sich der oben diskutierte gegenläufige Prozess der Wärmeleitung, der dafür sorgt, dass zu der Lötstelle Wärme hinzugeführt wird. Diese Wärmeleitung ist bekannterweise von dem Temperaturgradienten zwischen der unteren und oberen Keramikschicht abhängig, wobei dieser von der unteren zu der oberen Schicht definiert ist. D.h. es gilt: $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_d - T_0}{d}$, wobei d die Länge der Halbleiterblöcke und damit der Abstand der

Keramikschichten ist. Wenn die obere Schicht durch Peltier-Effekt abgekühlt wird, wird dieser Gradient immer negativer und es findet ein immer größer werdender Wärmefluß von der unteren zur oberen Keramikschicht statt. Wenn der Gradient so negativ wird, dass dieser Wärmefluß durch Wärmeleitung betragsmäßig gleich zu der Peltierwärmestromdichte ist, d.h. $w_{pel} = -w_{diff}$ ⊛ (w_{diff}: Wärmestromdichte wegen der Diffusion, d.h. durch Wärmeleitung) gilt, dann herrscht ein Gleichgewicht und man kann die Lötstelle nicht mehr kühlen. Man erreicht also die niedrigste Temperatur T_d der oberen Keramikschicht genau dann, wenn folgendes gilt:

$$\boxed{w_{ges} = w_{pel} + w_{diff} = 0}.$$

⊛ Negatives Vorzeichen, da quasi w_{pel} nach unten und w_{diff} nach oben fließt.

w_{pel} ist ja aus Teilaufgabe a) bekannt und w_{diff} ist durch die Wärmeleitung hervorgerufen, die durch die Gleichung $-\lambda \nabla T$ (hier flächenbezogen, deshalb nicht $-\lambda A \nabla T$) allgemein gegeben ist. Da aber hier die Wärmeleitung über die beiden Halbleiterblöcke (n-SiGe und p-SiGe) stattfindet, gilt:

$$\boxed{w_{diff} = -2\lambda \nabla T = -2\lambda \frac{T_d - T_0}{d}}. \quad \rightarrow \text{direkt } 2\lambda, \text{ da } \lambda_{SiGe} \text{ für beide Blöcke egal n oder p dotiert gleich ist.}$$

Setzt man die beiden Definitionen nun in die Bedingung für die niedrigste Temperatur ein:

$$\boxed{-(S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe})\, T_d \frac{I_{max}}{A} - 2\lambda \frac{T_d - T_0}{d} = 0}$$

so kriegt man die obige Gleichung, die man nach T_d auflösen kann und damit die niedrigste erreichbare Temperatur T_d berechnen kann:

$$\Rightarrow 2\lambda \frac{T_d - T_0}{d} = -(S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe})\, T_d \frac{I_{max}}{A} \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{d} T_d - \frac{2\lambda}{d} T_0 = -(S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe})\, T_d \frac{I_{max}}{A} \Leftrightarrow T_d \frac{2\lambda}{d} + (S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe}) \frac{I_{max}}{A} T_d = \frac{2\lambda}{d} T_0$$

$$\Leftrightarrow T_d \left[\frac{2\lambda}{d} + (S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe}) \frac{I_{max}}{A} \right] = \frac{2\lambda}{d} T_0 \Leftrightarrow T_d = \frac{\frac{2\lambda}{d} T_0}{\frac{2\lambda}{d} + (S_{p,SiGe} - S_{n,SiGe}) \frac{I_{max}}{A}}$$

Nun kann man die Zahlenwerte aus der Tabelle ablesen:

$$T_d = \frac{\frac{2 \cdot 0{,}0769 \frac{W}{cmK}}{0{,}4\,cm} \cdot 293\,K}{\frac{2 \cdot 0{,}0769 \frac{W}{cmK}}{0{,}4\,cm} + \left(0{,}43 \cdot 10^{-3} \frac{V}{K} + 0{,}45 \cdot 10^{-3} \frac{V}{K}\right) \cdot \frac{2{,}5\,A}{8 \cdot 10^{-2}\,cm^2}} \approx 273{,}5\,K$$