# Zusammenfassung 1 - Quanten und Wellen

- Planck'sches Postulat: Harmonischer Oszillator nimmt nur diskrete Energiewerte ein. ⇒ Quantenmechanik.
- Erweiterung von Einstein: Licht ist auch gequantelt. (Lichtquanten = Photonen)
- Welle-Korpuskel Dualismus: Licht kann als Welle oder Teilchen (=Photon) aufgefasst werden.
  ⇒ Wellencharakter: Lichtbeugung, Interferenz; Teilchencharakter: Absorption und Emission.
- Energie des Lichts: $\boxed{E = h \cdot f = \hbar \cdot \omega}$ mit h: Planck'sches Wirkungsquantum, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
- Impuls eines Photons: $\boxed{p = \hbar \cdot k}$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl.
  ⇒ $\boxed{\omega = c \cdot k}$

→ Nach De Broglie gilt Welle-Korpuskel Dualismus auch für Materie.

→ Ebene Welle: $\boxed{\Psi(\vec{r},t) = C \cdot e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}}$ ⇒ Ebene Wellen sind zeitlich und räumlich unbegrenzt, aber Teilchen (Materie) sind begrenzt.

⇒ Zu den Teilchen ist ein räumlich begrenztes Wellenpaket eng benachbarter Frequenzen zugeordnet, aber keine ebene Welle.

- Heisenbergsche Unschärferelation:

1) Ort und Impuls eines Teilchens sind nicht gleichzeitig scharf definiert: $\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$

2) Energie und Zeit eines Teilchens sind nicht gleichzeitig scharf definiert: $\boxed{\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}}$

- allgemeine Schrödingergleichung:

$$\boxed{-j\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t)}$$

mit $V(\vec{r},t)$: Potential des Kraftfelds $\vec{F}$, in dem das Teilchen sich bewegt

→ Wenn V zeitunabhängig ist, kann man mit einem Separationsansatz die zeitunabhängige Schrödingergleichung herleiten:

$$\boxed{\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\cdot\Psi(\vec{r}) = E\cdot\Psi(\vec{r})}$$

- Normierungsbedingung: $\Psi$ hat keine physikalische Bedeutung, aber $|\Psi|^2 = \Psi\cdot\Psi^*$ ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte.
Da ein Teilchen auf jeden Fall irgendwo im Raum sein soll, folgt die Normierungsbedingung:

$$\boxed{\int_{\text{Volumen}} \Psi^*(\vec{r},t)\cdot\Psi(\vec{r},t)\,d\ldots = 1}$$

- Wichtiges Beispiel: Gebundenes Elektron im eindimensionalen Potentialtopf.

→ Das Ziel ist die Wellenfunktion für das Elektron zu bestimmen. Dafür soll die Schrödingergleichung gelöst werden. Relevant für diese Vorlesung ist eher die zeitunabhängige Variante.

→ Allgemeines Lösungsschema:

0. Das Potential V von der Struktur des Potentialtopfes ablesen. V ist meistens stückweise konstant. Daher in allen Bereichen, wo V konstant ist, soll man die Lösung finden.
   ⇒ Spezialfall: Ist $V \to \infty$, dann kann das Teilchen in diesem Bereich nicht existieren, es gilt $\Psi = 0$.
1. Allgemeinen Lösungsansatz aufschreiben: $\Psi(x) = C_1 \cdot e^{jkx} + C_2 e^{-jkx}$ (falls 1-dim.)
2. k durch Einsetzen der Lösung in Schrödingergl. bestimmen → $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}E \Leftrightarrow E = \frac{k^2\hbar^2}{2m_0}$
3. k und die Konstanten mithilfe der Randbedingungen bestimmen.
4. Durch Normierung die letzte unbekannte Konstante bestimmen.

- Randbedingungen werden durch folgende Kriterien für die Lösung bestimmt:
  - $\Psi(x)$ ist stetig.
  - $\Psi(x)$ ist differenzierbar.
- Wichtig im Hinterkopf zu haben:
  - Lösung im eindimensionalen Potentialtopf lautet: $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ (Potentialtopf ist zwischen $x=0$ und $x=a$).
  - Erlaubte, diskrete Energiewerte sind (in dem 1-dim. Fall): $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_0a^2}\cdot n^2$ mit $n = 1, 2, \ldots$