Aufgabe 2 Zweitorbeschreibung (25 Punkte)

25

Gegeben ist ein Zweitor (Bild 2), dessen Kennfläche im Folgenden mit $\mathcal{F}$ bezeichnet wird.

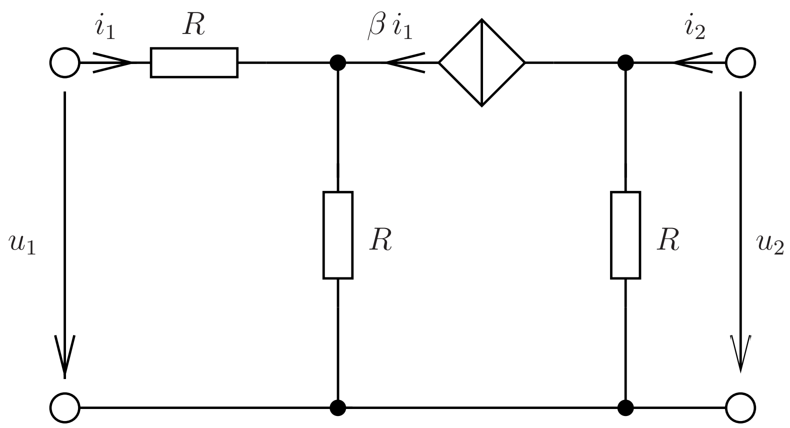


Bild 2. Zweitor

a)* Wie lautet allgemein der Zusammenhang zwischen einem beliebigen Betriebsvektor $\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathcal{F}$ des Zweitors und der Betriebsmatrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$? ($\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$) 2

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$$

√√

b)* Welche Bedingung ist allgemein an ein Zweitor zu stellen, damit eine parametrische Beschreibung des Zweitors mit einer Betriebsmatrix möglich ist? 1

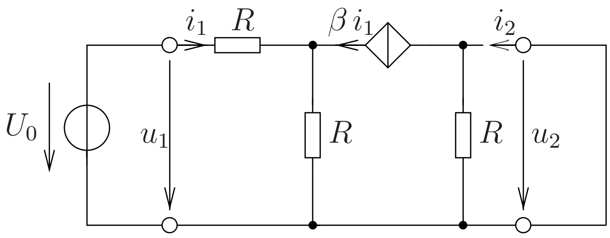
Das Zweitor muss linear sein. √

c)* Wann existiert allgemein die Betriebsmatrix bei linearen Zweitoren? 1

Die Beschreibung mit einer Betriebsmatrix existiert bei linearen Zweitoren immer. √

4

d)* **Fall 1:** Bestimmen Sie alle Torströme und -spannungen, wenn das Zweitor in Bild 2 wie folgt beschaltet ist:



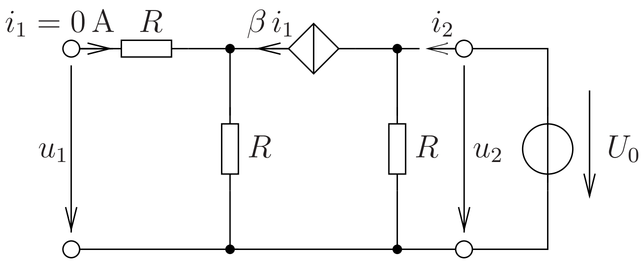
$u_1 = U_0$, $u_2 = 0\,\mathrm{V}$ √√

$i_1 R + (1+\beta) R\, i_1 = u_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{U_0}{R(2+\beta)}$ √

$i_2 = \beta i_1 = \frac{\beta U_0}{R(2+\beta)}$ √

4

e)* **Fall 2:** Bestimmen Sie alle Torströme und -spannungen, wenn das Zweitor in Bild 2 wie folgt beschaltet ist:



$i_1 = 0\,\mathrm{A}$, $u_2 = U_0$ √√
$u_1 = 0\,\mathrm{V}$ √
$i_2 = \beta i_1 + U_0/R = U_0/R$ √
√

f) Geben Sie die Betriebsmatrix des Zweitors (Bild 2) unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) an, so dass $\mathcal{F} = \text{Bild}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$. 3

Die Spalten der Betriebsmatrix müssen linear unabhängig sein.
Eine mögliche Betriebsmatrix ist mit Fall 1 und 2:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,\mathrm{V} & U_0 \\ U_0 & 0\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{A} & \frac{U_0}{R(2+\beta)} \\ U_0/R & \frac{\beta U_0}{R(2+\beta)} \end{bmatrix} \checkmark$$

g) Berechnen Sie aus der Betriebsmatrix von Teilaufgabe f) die Hybridmatrix des Zweitors? 5

Hinweis: Achten Sie darauf, dass der Rechenweg klar aus Ihrer Lösung hervorgeht.

$u_1 = RI_0(2+\beta)c_2$ (1)
$i_2 = U_0/Rc_1 + \beta I_0 c_2$ (2)
mit $u_2 = U_0 c_1$ und $i_1 = I_0 c_2$ folgt aus (1) und (2) $\checkmark$

$u_1 = R(2+\beta)i_1$ $\checkmark$
und $i_2 = u_2/R + \beta i_1$ $\checkmark$
Als Hybridmatrix ergibt sich damit $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} R(2+\beta) & 0 \\ \beta & 1/R \end{bmatrix}$ $\checkmark\checkmark$

h) Wann existiert die Hybridbeschreibung des Zweitors aus Teilaufgabe g)? 1

Die Hybridmatrix existiert, wenn $R \neq 0$ ist. $\checkmark$

4

i) Begründen Sie mit Hilfe der Betriebsmatrix aus Teilaufgabe f), ob das Zweitor reziprok ist.

Bedingung für Reziprozität an die Betriebsmatrix $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$ ✓

$$\begin{bmatrix} U_0 & 0\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{V} & U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{U_0}{R(2+\beta)} & 0\,\mathrm{A} \\ \frac{\beta U_0}{R(2+\beta)} & U_0/R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{U_0}{R(2+\beta)} & \frac{\beta U_0}{R(2+\beta)} \\ 0\,\mathrm{A} & U_0/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 & 0\,\mathrm{V} \\ 0\,\mathrm{V} & U_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{U_0^2}{R(2+\beta)} & 0\,\mathrm{VA} \\ \frac{\beta U_0^2}{R(2+\beta)} & U_0^2/R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{U_0^2}{R(2+\beta)} & \frac{\beta U_0^2}{R(2+\beta)} \\ 0\,\mathrm{VA} & U_0^2/R \end{bmatrix} \neq 0 \text{ ✓✓}$$

$\Rightarrow$ Das Zweitor ist nicht reziprok. ✓

14

Aufgabe 2 Nichtlineares Zweitor (14 Punkte)

Gegeben sei die Hybridbeschreibung eines nichtlinearen Zweitors $\mathcal{Z}$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\mathrm{T} \ln\left(\frac{i_1}{I_\mathrm{s}} + 1\right) \\ \frac{\beta}{\beta+2} i_1 \end{bmatrix}.$$

3

a)* Wie lautet allgemein die Widerstandsbeschreibung eines nichtlinearen Zweitors? Existiert die Widerstandsbeschreibung für das betrachtete Zweitor? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{i})$$

u_2 ist unabh. von $i_1, i_2 \Rightarrow$ Wid. beschr. ex. nicht

2

b)* Geben Sie eine implizite Beschreibung $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i})$ des Zweitors an.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_\mathrm{T} \ln\left(\frac{i_1}{I_\mathrm{s}} + 1\right) \\ \frac{\beta}{\beta+2} i_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

c)* Die Parameterdarstellung des betrachteten Zweitors kann unter Verwendung von Funktionen $u_1(c_1)$, $u_2(c_2)$, $i_1(c_1)$ und $i_2(c_1)$ wie folgt angegeben werden: 4

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} u_1(c_1) & u_2(c_2) & i_1(c_1) & i_2(c_1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Vervollständigen Sie die Parameterbeschreibung. Geben Sie dazu je eine mögliche Funktion $u_1(c_1)$, $u_2(c_2)$, $i_1(c_1)$ und $i_2(c_1)$ an.

$$i_1(c_1) = 1\,\mathrm{A} c_1, \quad u_1(c_1) = U_{\mathrm{T}} \ln\left(\frac{1\,\mathrm{A} c_1}{I_{\mathrm{s}}} + 1\right)$$

$$u_2(c_2) = 1\,\mathrm{V} c_2, \quad i_2(c_1) = \frac{\beta}{\beta+2} 1\,\mathrm{A} c_1$$

d)* Geben Sie die um den Arbeitspunkt $(\boldsymbol{u}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{i}_{\mathrm{A}})$ linearisierte Hybridbeschreibung des Zweitors an. 5

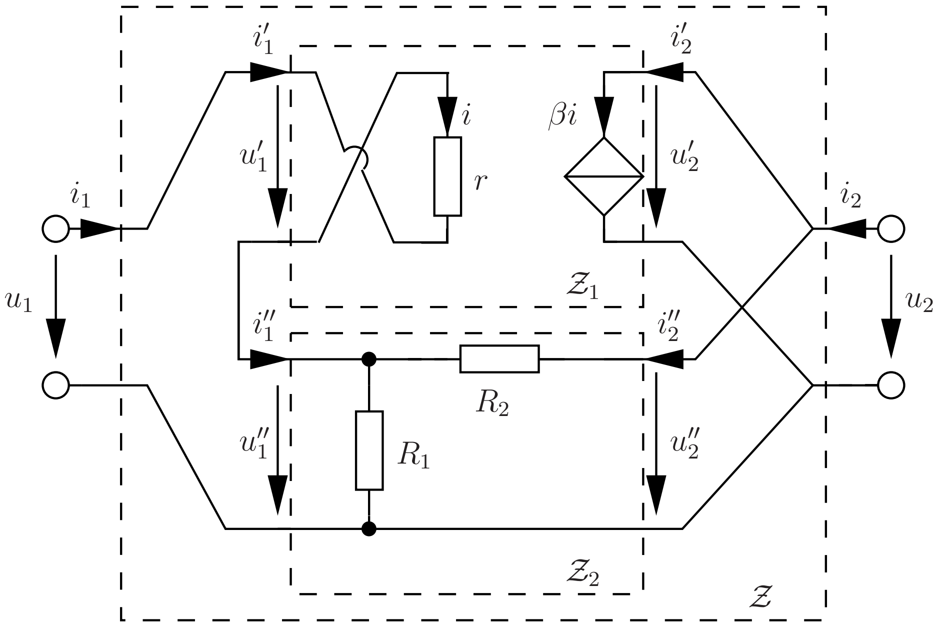
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{A},1} \\ i_{\mathrm{A},2} \end{bmatrix} + \boldsymbol{J_h}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{A}}, \boldsymbol{i}_{\mathrm{A}}) \begin{bmatrix} \Delta i_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J_h}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}) = \begin{bmatrix} \frac{U_{\mathrm{T}}}{I_{\mathrm{s}}} \frac{1}{i_1/I_{\mathrm{s}}+1} & 0 \\ \frac{\beta}{\beta+2} & 0 \end{bmatrix}$$

21

Aufgabe 2 Zweitore (21 Punkte)

Die folgende Zweitorverschaltung soll untersucht werden:



1

a)* Wie sind die beiden Zweitore $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ veschaltet?

Serien-Parallel-Schaltung (Hybridschaltung).√

2

b)* Sind die Torbedingungen erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Tore des Zweitors $\mathcal{Z}_1$ sind galvanisch getrennt. Deshalb sind die Torbedingungen erfüllt an beiden Zweitoren.√√

2

c)* Welche Zweitormatrizen von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ müssen nun wie verküpft werden, um die Verschaltung zu beschreiben?

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2$. (die Hybridmatrizen)√√

2

d) Geben Sie die benötigte Zweitormatrix von $\mathcal{Z}_1$ an.

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \checkmark\checkmark.$$

e) Geben Sie die benötigte Zweitormatrix von $\mathcal{Z}_2$ an. 4

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{u_1''}{i_1''}\Big|_{u_2''=0} & \frac{u_1''}{u_2''}\Big|_{i_1''=0} \\ \frac{i_2''}{i_1''}\Big|_{u_2''=0} & \frac{i_2''}{u_2''}\Big|_{i_1''=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1||R_2 & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \surd\surd\surd\surd.$$

f) Geben Sie die resultierende Zweitorbeschreibung des gesamten Zweitors $\mathcal{Z}$ an. 2

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} R_1||R_2 + r & \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ -\frac{R_1}{R_1+R_2} - \beta & \frac{1}{R_1+R_2} \end{bmatrix}. \surd\surd$$

Die inverse hybride Beschreibung des Zweitors $\mathcal{Z}$ hat folgende Form:

$$\boldsymbol{H}' = \frac{1}{R_1||R_2 + r + \frac{R_1^2}{R_1+R_2} + \beta R_1} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ \beta(R_1+R_2) + R_1 & R_1R_2 + r(R_1+R_2) \end{bmatrix}.$$

g)* Geben Sie die inverse hybride Beschreibung des Zweitors $\mathcal{Z}$ für $\beta \to \infty$ an. 4

$$\boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{R_1+R_2}{R_1} & 0 \end{bmatrix}. \surd\surd\surd\surd$$

1

h) Um welches Zweitor handelt es sich für $\beta \to \infty$?

Ein USU $\surd$

3

i) Zeichnen Sie eine Ihnen bekannte Schaltung mit Operationsverstärkern, die dieselbe inverse hybride Beschreibung für $\beta \to \infty$ realisiert.

Nicht invertierender Verstärker. $\surd\surd\surd$